# A Matemática do Ensino Médio

*Volume 3*

Elon Lages Lima
Paulo Cezar Pinto Carvalho
Eduardo Wagner
Augusto César Morgado




COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

# A Matemática do Ensino Médio

## Volume 3



Quinta Edição

Elon Lages Lima
Paulo Cezar Pinto Carvalho
Eduardo Wagner
Augusto César Morgado



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Estrada Dona Castorina, 110 - Horto
22460-320, Rio de Janeiro - RJ

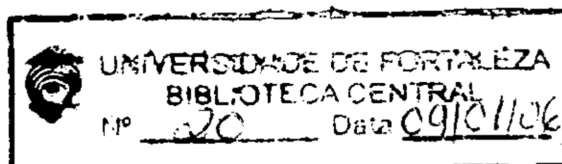
Impresso no Brasil / Printed in Brazil

**Coleção do Professor de Matemática**

Capa: Rodolfo Capeto

Distribuição e vendas:
Sociedade Brasileira de Matemática
e-mail: vendalivros@sbm.org.br
Tel.: (21) 2529-5073
www.sbm.org.br

ISBN: 85-85818- 12-3



# Prefácio

Com este terceiro volume da série "A Matemática do Ensino Médio", completamos a apresentação dos principais temas matemáticos que se ensinam nesses três anos finais da Educação Básica em nosso país.

Os quatro capítulos iniciais são dedicados ao uso de coordenadas no plano e no espaço, fazendo uma introdução à Geometria Analítica a duas e três dimensões, seguida de um estudo de sistemas de equações lineares, matrizes e determinantes.

Procuramos sempre pôr em relevo as conexões entre os métodos algébricos e os conceitos geométricos. Este ponto de vista prossegue no capítulo de números complexos, onde é dada uma ênfase especial ao significado geométrico das operações com aqueles números, inclusive com uma aplicação às transformações geométricas de inversão. O capítulo final retoma o estudo dos polinômios iniciado no Volume 1, admitindo agora polinômios complexos e abordando mais detalhadamente as equações algébricas de grau qualquer.

O material exposto nestes três volumes foi apresentado no programa de aperfeiçoamento para professores de Matemática do Ensino Médio, que se vem realizando no IMPA desde 1996, com o apoio da CAPES e da FAPERJ.

Os quatro primeiros capítulos do presente livro foram redigidos por Elon Lages Lima e Eduardo Wagner, o quinto por Augusto César Morgado e o sexto por Paulo Cezar P. Carvalho. Na realidade, porém, todos nós discutimos longamente os assuntos tratados nos três volumes e somos igualmente responsáveis por todos eles.

Rio de Janeiro, setembro, 1998

Elon Lages Lima

Paulo Cezar P. Carvalho

Eduardo Wagner

Augusto César Morgado

# Conteúdo

Capítulo 1

# Geometria Analítica Plana

## 1. Introdução

Neste capítulo é feita uma breve apresentação da Geometria Analí tica do plano, com ênfase nos princípios básicos que determinam o uso de coordenadas. Não há nenhuma preocupação de completeza. Para um tratamento mais extenso, o leitor pode consultar o livro "Coordenadas no Plano", da Coleção do Professor de Matemática da SBM.

## 2. Coordenadas na reta

Admitimos fixada, de uma vez por todas, uma unidade de comprimento. Dados os pontos A, B quaisquer, o comprimento do segmento de reta AB chama-se a *distância* entre os pontos A e B. Escrevemos $d(A, B)$ para indicar essa distância, que é um número real. Convencionaremos pôr $d(A, A) = 0$. Se $A \neq B$, tem-se $d(A, B) > 0$. Além disso, vale

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$$

se, e somente se, o ponto C pertence ao segmento de reta AB. É claro também que $d(A, B) = d(B, A)$.

A noção de distância permite introduzir coordenadas sobre uma reta, ou seja, representar os pontos da reta por meio de números reais. Para fazer isto, será necessário orientar a reta e escolher um dos seus pontos como origem.

Seguem-se os detalhes desse procedimento.

Uma reta diz-se *orientada* quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado *positivo*; o sentido inverso chama-se *negativo*. Numa reta orientada, diz-se que o ponto $B$ está *à direita* do ponto $A$ (portanto $A$ está *à esquerda* de $B$) quando o sentido de percurso de $A$ para $B$ é positivo.

Um *eixo* é uma reta orientada na qual se fixou um ponto $O$, chamado a *origem*.

Todo eixo $E$ pode ser posto, de modo natural, em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, do seguinte modo. À origem $O$ do eixo faz-se corresponder o número zero. A cada ponto $X$ de $E$ situado à direita de $O$ corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$ = distância de $X$ à origem = comprimento do segmento de reta $OX$. Aos pontos situados à esquerda de $O$ correspondem números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias deses pontos à origem.

Portanto, a cada ponto $X$ no eixo $E$ corresponde o número real $x = d(O, X)$ se $X$ está à direita de $O$ e $x = -d(O, X)$ se $X$ está à esquerda de $O$.

O número real $x$, que corresponde ao ponto $X$ do eixo $E$ da maneira acima indicada, chama-se a *coordenada* desse ponto.

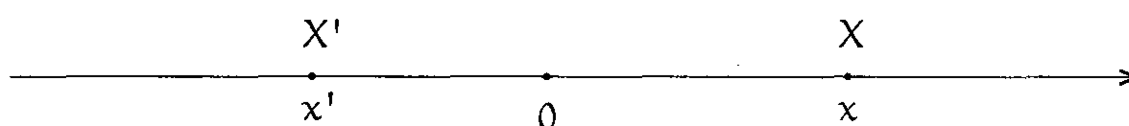



**Figura 1:** $x = d(O, X) \quad x' = -d(O, X')$

Se $x$ e $y$ são respectivamente as coordenadas dos pontos $X$ e $Y$ do eixo $E$ então tem-se $x < y$ se, e somente se, $X$ está à esquerda de $Y$. Além disso, tem-se $d(X, Y) = |x - y|$.

A importante igualdade $d(X, Y) = |x-y|$ se demonstra usando (além da relação evidente $d(A, B) = d(B, A)$) o fato de que se $A$, $B$, $C$ são pontos de uma reta tais que $C$ está situado entre $A$ e $B$ então

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B).$$

Com efeito, dados os pontos $X$ e $Y$ sobre o eixo $E$, com coordena-

das respectivas $x$ e $y$, sem perda de generalidade podemos supor que X esteja à esquerda de Y. Então há 3 casos possíveis:

(a) O está entre X e Y (logo $x < 0 < y$);

(b) Y está entre X e O (logo $x < y < 0$);

(c) X está entre O e Y (logo $0 < x < y$).

No primeiro caso, tem-se

$$d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) = -x + y = |x - y|.$$

No segundo caso,

$$d(O,X) = d(O,Y) + d(Y,X),$$

ou seja, $-x = -y + d(X,Y)$, donde

$$d(X,Y) = y - x = |x - y|.$$

Finalmente, no terceiro caso,

$$d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y),$$

isto é, $y = x + d(X,Y)$, donde

$$d(X,Y) = y - x = |x - y|.$$

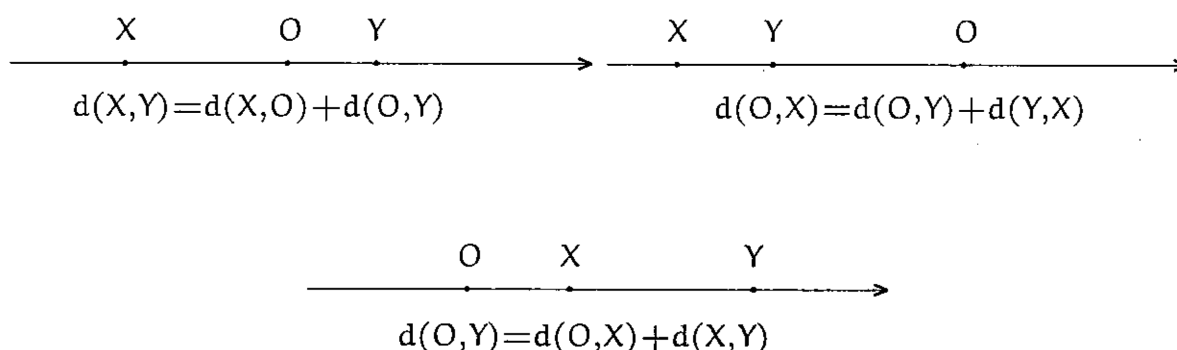
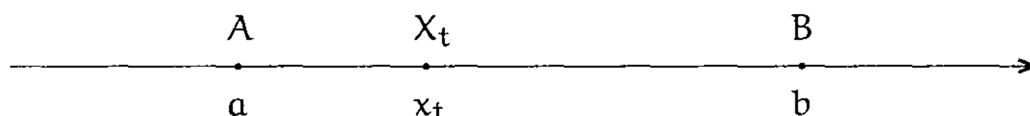



**Figura 2**

Se A e B são pontos do eixo E, com A à esquerda de B, e suas coordenadas respectivas são $a$ e $b$, então a coordenada $x$ de um ponto arbitrário X do segmento de reta AB é um número $x$ tal que $a \leqslant x \leqslant b$. Noutras palavras, ao segmento de reta $AB \subset E$ corresponde o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Para cada ponto X do segmento de reta AB, tem-se evidentemente $d(A, X) \leqslant d(A, B)$, logo a razão $t = d(A, X)/d(A, B)$ é um número real compreendido entre 0 e 1. Quando $X = A$ tem-se $t = 0$ e, quando $X = B$, vale $t = 1$. Se, para cada $t \in [0, 1]$, chamarmos de $X_t$ o ponto do segmento de reta AB tal que $d(A, X_t)/d(A, B) = t$, veremos que a coordenada $x_t$ do ponto $X_t$ está relacionada com as coordenadas $a$ e $b$ dos pontos A e B pela igualdade $(x_t - a)/(b - a) = t$, ou seja,

$$x_t = (1 - t)a + tb = a + t(b - a).$$




$T = d(A, X_t)/d(A,B) = (x_t - a)/(b - a)$

**Figura 3**

Quando $t = 1/2$, $X_t = X_{1/2}$ é o ponto médio do segmento AB e sua coordenada

$$x_{1/2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

é a média aritmética entre as coordenadas $a$ e $b$ dos pontos A e B.

Noutro exemplo, tomando $t = 1/3$, obtemos o ponto $X = X_{1/3}$ cuja coordenada

$$x = \left(1 - \frac{1}{3}\right)a + \frac{1}{3}b = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$$

é o número que separa o intervalo $[a, b]$ em dois subintervalos $[a, x]$ e $[x, b]$ com $(x - a)/(b - a) = 1/3$.

**Observação 1.** Quando, no Volume 1, estudamos os números reais, fizemos a cada $x \in \mathbb{R}$ corresponder um ponto X sobre o eixo E. Em Geometria Analítica, o processo é inverso: procura-se associar a cada ponto do eixo E um número, chamado sua coordenada. Para isso, estamos admitindo que exista a noção de distância entre dois

pontos desse eixo, isto é, que tenha sido fixada uma unidade de comprimento.

**Observação 2.** A expressão "sentido de percurso", usada na definição de reta orientada, possui um significado intuitivo evidente, que preferimos não analisar aqui com mais detalhes. O leitor interessado numa conceituação rigorosa dessa idéia pode consultar as 10 primeiras páginas do livro "Isometrias", da Coleção do Professor de Matemática da SBM.. Em termos de coordenadas (portanto a posteriori) se $A$, $B$, $A'$ e $B'$ são pontos sobre o mesmo eixo, cujas coordenadas são respectivamente $a$, $b$, $a'$, $b'$, o sentido de percurso de $A$ para $B$ coincide com o sentido de percurso de $A'$ para $B'$ se, e somente se, as diferenças $a' - a$ e $b' - b$ têm o mesmo sinal.

## 3. Coordenadas no plano

Um *sistema de coordenadas* (cartesianas) no plano $\Pi$ consiste num par de eixos perpendiculares $OX$ e $OY$ contidos nesse plano, com a mesma origem $O$. $OX$ chama-se o eixo das *abcissas* e $OY$ é o eixo das *ordenadas*. O sistema é indicado com a notação $OXY$.

A escolha de um sistema de coordenadas no plano $\Pi$ permite estabelecer uma correspondência biunívoca $\Pi \to \mathbb{R}^2$. Como vimos no Vol. 1, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados $(x, y)$ de números reais. A cada ponto $P$ do plano $\Pi$ corresponde um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os números $x$ e $y$ são as *coordenadas* do ponto $P$ relativamente ao sistema $OXY$: $x$ é a *abcissa* e $y$ é a *ordenada* de $P$. As coordenadas $x$, $y$ do ponto $P$ são definidas do seguinte modo:

Se $P$ estiver sobre o eixo $OX$, o par ordenado que lhe corresponde é $(x, 0)$, onde $x$ é a coordenada de $P$ no eixo $OX$, conforme explicado na seção anterior. Se $P$ estiver sobre o eixo $OY$, a ele corresponde o par $(0, y)$, onde $y$ é a coordenada de $P$ nesse eixo. Se $P$ não está em qualquer dos eixos, traçamos por $P$ uma paralela ao eixo $OY$, a qual corta $OX$ no ponto de coordenada $x$ e uma paralela ao eixo $OX$, a qual corta $OY$ no ponto de coordenada $y$. Então $x$ será

a abcissa e $y$ a ordenada do ponto $P$. Noutras palavras, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é o par ordenado de números reais que corresponde ao ponto $P$.

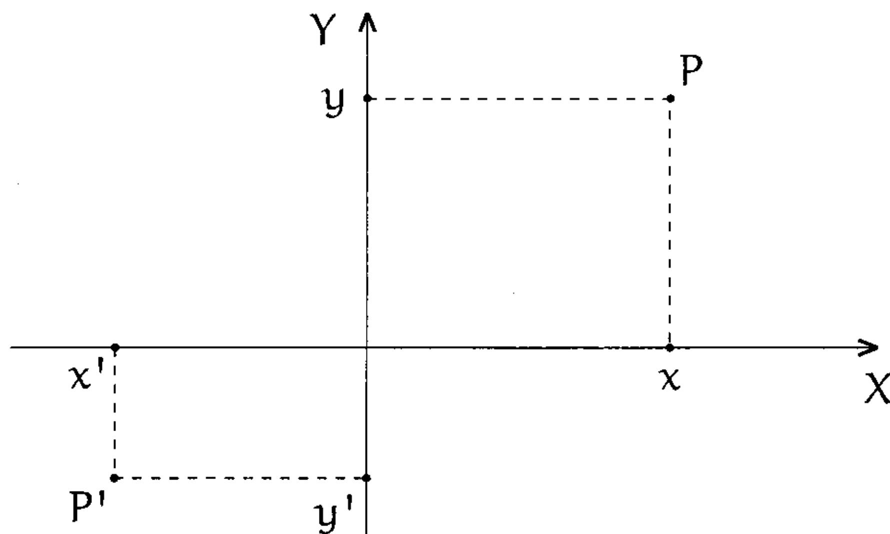



**Figura 4**

O ponto O, origem do sistema de coordenadas, tem abcissa e ordenada ambas iguais a zero. Assim, a ele corresponde o par $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Se $x$ é a abcissa e $y$ é a ordenada do ponto $P$, o ponto $P'$ de coordenadas $(x, 0)$ chama-se a *projeção de* $P$ *sobre o eixo* OX enquanto o ponto $P''$, de coordenadas $(0, y)$ é chamado a *projeção de* $P$ *sobre o eixo* OY.

O emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam. O primeiro é, como vimos no Vol. 1, o de atribuir um significado geométrico (e com isto dar um maior conteúdo intuitivo) a fatos de natureza numérica, como o comportamento de uma função real de uma variável real, que ganha muito em clareza quando se olha para seu gráfico. O segundo propósito do uso das coordenadas vai no sentido oposto: recorre-se a elas a fim de resolver problemas da Geometria. Este é o objetivo da Geometria Analítica. No primeiro caso, a ênfase recai sobre a correspondência $\mathbb{R}^2 \to \Pi$ e no segundo sobre sua inversa $\Pi \to \mathbb{R}^2$. Na prática, esses dois pontos de vista se entrelaçam: para estabelecer os fatos iniciais da Geometria Analítica usam-se os resultados básicos da Geometria Euclidiana.

Em princípio o plano $\Pi$, cujos elementos são pontos, não é a mesma coisa que o conjunto $\mathbb{R}^2$, cujos elementos são pares ordenados de números reais. Entretanto, quando fixarmos um sistema de coordenadas em $\Pi$, usaremos a correspondência $\Pi \to \mathbb{R}^2$ para identificar cada ponto $P$ do plano com o par ordenado $(x, y)$ que lhe corresponde. Assim, escreveremos $P = (x, y)$ querendo dizer com isto que $P$ é o ponto do plano cuja abcissa é $x$ e cuja ordenada é $y$.

Os eixos ortogonais OX e OY decompõem o plano $\Pi$ em quatro regiões, cada uma das quais se chama um *quadrante*. O primeiro quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. O segundo quadrante é formado pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$. O terceiro, pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0$. Finalmente, os pontos $P = (x, y)$ do quarto quadrante são aqueles em que $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$.

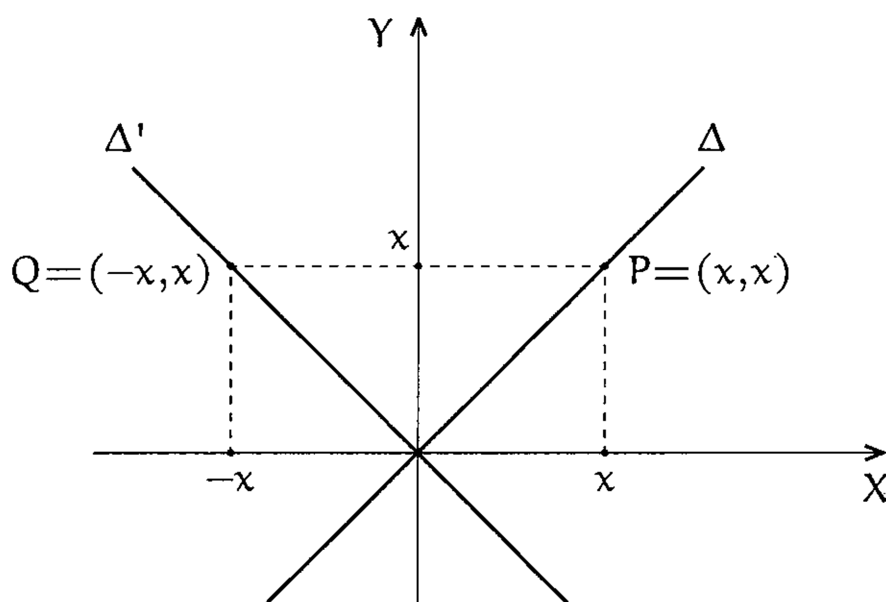



**Figura 5**

Fixado o sistema de coordenadas OXY no plano $\Pi$, o primeiro e o terceiro quadrante formam dois ângulos retos, opostos pelo vértice. Os pontos $P = (x, y)$ da bissetriz comum desses dois ângulos são (como todos os pontos de uma bissetriz) equidistantes dos lados, logo têm abcissa e ordenada iguais (ambas positivas no primeiro quadrante e ambas negativas no terceiro). Esta reta $\Delta$

chama-se a *diagonal* do plano $\Pi$ (relativamente ao sistema OXY). Tem-se portanto $P = (x, y) \in \Delta$ se, e somente se, $x = y$.

Analogamente, um ponto $Q = (x, y)$ pertence à bissetriz $\Delta'$ comum ao segundo e quarto quadrantes se, e somente se, $x = -y$.

Outro exemplo de como exprimir um fato geométrico de forma analítica é o seguinte. Dados os pontos $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$, quais são as coordenadas do ponto médio $M = (x, y)$ do segmento de reta $AA'$?

A resposta é $x = \frac{a + a'}{2}$ e $y = \frac{b + b'}{2}$ e a ela se chega usando um pouco de Geometria Plana. Suponhamos inicialmente que $a \neq a'$ e $b \neq b'$, isto é, que o segmento $AA'$ não é vertical (paralelo ao eixo OY) nem horizontal (paralelo ao eixo OX). Então, considerando os pontos $P = (x, b)$ e $Q = (a', y)$, vemos que $APM$ e $MQA'$ são triângulos retângulos cujas hipotenusas $AM$ e $MA'$ têm o mesmo comprimento, já que $M$ é o ponto médio de $AA'$. Além disso, os ângulos agudos $P\widehat{A}M$ e $Q\widehat{M}A'$ são congruentes porque os lados $AP$ e $MQ$ são paralelos. Portanto $APM$ e $MQA'$ são triângulos congruentes. Daí resulta que os segmentos $AP$ e $MQ$ têm o mesmo comprimento. Logo, pondo $A_0 = (a, 0)$, $M_0 = (x, 0)$ e $A'_0 = (a', 0)$, concluímos que $M_0$ é o ponto médio do segmento $A_0A'_0$ no eixo OX. Segue-se então que $x = (a + a')/2$, conforme vimos na seção 2. De modo análogo se vê que $y = (b + b')/2$.

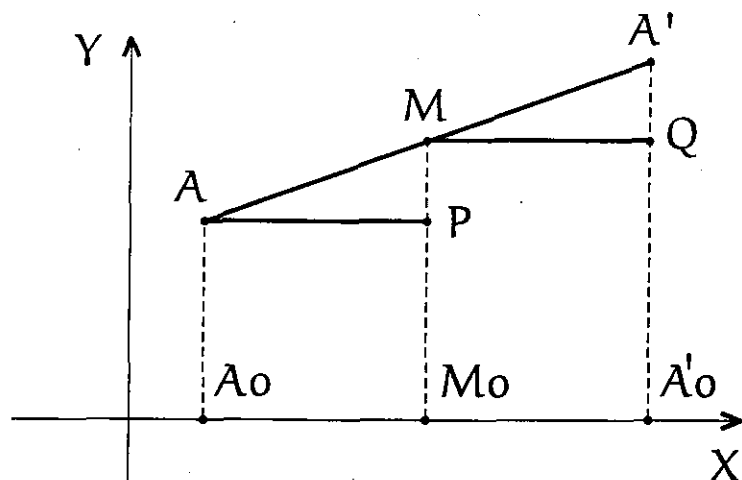



**Figura 6**

Quando o segmento $AA'$ é horizontal (isto é, $b = b'$) ou vertical ($a = a'$), o argumento acima se simplifica, reduzindo-se imediatamente ao caso do ponto médio de um segmento localizado sobre um eixo, conforme tratado na seção 2.

De maneira análoga se responde a pergunta mais geral seguinte: dados os pontos $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$ e o número real $t$, com $0 \leqslant t \leqslant 1$, quais são as coordenadas do ponto $X_t = (x_t, y_t)$, situado sobre o segmento $AA'$, de tal modo que $d(A, X_t)/d(A, A') = t$?

Esta pergunta foi feita na seção 2, com os pontos $A$, $A'$ localizados sobre um eixo, e a resposta foi dada em termos da única coordenada que cada um desses pontos tem naquele eixo. Pelo que vimos lá, se $A = (a, 0)$ e $A' = (a', 0)$ estiverem sobre o eixo $OX$ então $X_t = (x_t, 0)$, com $x_t = (1 - t)a + ta' = a + t(a' - a)$. Analogamente, se $A = (0, b)$ e $A' = (0, b')$ pertencerem ao eixo $OY$ então $X_t = (0, y_t)$, onde $y_t = (1 - t)b + tb' = b + t(b' - b)$ quando $b = b'$, ou seja, quando $AA'$ é horizontal, e $X_t = (a, (1 - t)b + tb')$ quando $AA'$ é vertical, isto é, quando $a = a'$.

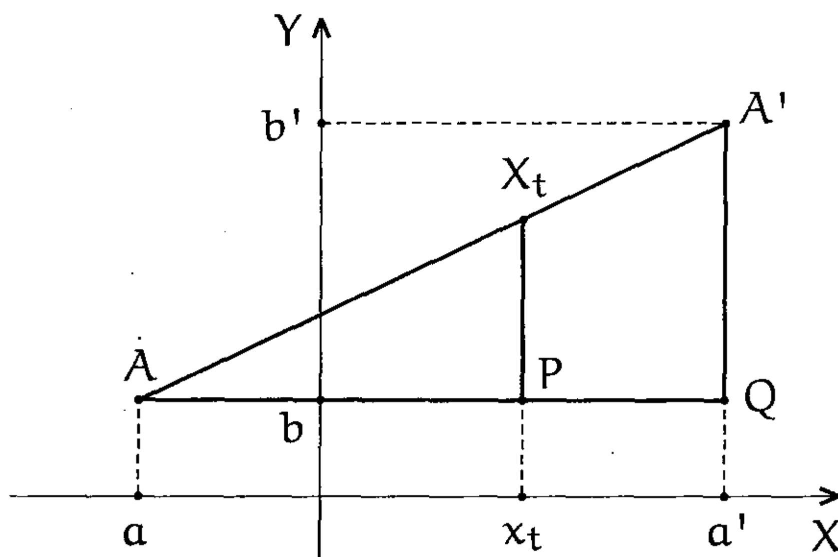



**Figura 7**

Quando $a \neq a'$ e $b \neq b'$, ou seja, quando o segmento $AA'$ não é paralelo a qualquer dos eixos, um argumento muito parecido com o anterior se aplica, só que agora é mais conveniente comparar

os triângulos retângulos $APX_t$ e $AQA'$, com $P = (x_t, b)$ e $Q = (a', b)$. Estes triângulos são semelhantes, pois têm um ângulo agudo comum. A razão de semelhança é $d(A, X_t)/d(A, A') = t$, portanto temos $d(A, P)/d(A, Q) = t$, ou seja, $(x_t - a)/(a' - a) = t$, e daí resulta $x_t = (1-t)a + ta'$. Analogamente, $y_t = (1-t)b + tb'$ (com o mesmo valor de t.!). Podemos então enunciar:

Dados $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$ as coordenadas do ponto $X_t = (x_t, y_t)$ do segmento $AA'$ tal que $d(A, X_t)/d(A, A') = t$ são $x_t = (1-t)a + ta'$ e $y_t = (1-t)b + tb'$.

Em particular, quando $t = 1/2$ reobtemos as coordenadas $x_{1/2} = (a + a')/2$ e $y_{1/2} = (b + b')/2$ do ponto médio de $AA'$.

Note-se ainda, que para $t = 0$, temos $X_0 = A$ e, para $t = 1$, resulta $X_1 = A'$.

A expressão $X_t = ((1-t)a + ta', (1-t)b + tb')$, quando t varia de 0 a 1, fornece todos os pontos do segmento de reta $AA'$, onde $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$. A função $t \mapsto X_t$, cujo domínio é o intervalo $[0, 1]$ e cujo contra-domínio é o segmento de reta $AA'$, chama-se uma *parametrização* desse segmento e a variável t chama-se o *parâmetro*.

Se, na expressão que fornece as coordenadas do ponto $X_t$, permitirmos que o parâmetro t assuma todos os valores reais, obteremos todos os pontos da reta $AA'$, não apenas os do segmento. Quando $t \geqslant 0$, $X_t$ percorre a semi-reta de origem A que contém o ponto $A'$. Quando $t < 0$, $X_t$ percorre a semi-reta oposta. Portanto, quando t varia em $\mathbb{R}$, a função $t \mapsto X_t$, de domínio $\mathbb{R}$, é uma parametrização da reta $AA'$.

Em particular, a reta OA, que contém a origem O e o ponto $A = (a, b)$, é formada pelos pontos $X = (ta, tb)$, obtidos com $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Quando $t > 0$, temos os pontos da semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e quando $0 \leqslant t \leqslant 1$ temos os pontos do segmento de reta OA.

As coordenadas do ponto médio de um segmento vão ajudar-nos a responder outra pergunta de natureza geométrica.

Diz-se que um segmento de reta está *orientado* quando se escolheu um dos seus pontos extremos para ser o ponto inicial (e

o outro será o ponto final). Quando escrevemos "o comprimento orientado AB" estamos querendo dizer que A é o ponto inicial e B é o ponto final do segmento. Do contrário, escreveríamos "o segmento orientado BA".

São dados o segmento de reta orientado $AA'$, com $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, e o ponto $C = (c, d)$, fora da reta $AA'$. Quer-se determinar as coordenadas do ponto $C' = (x, y)$ de modo que $CC'$ seja o segmento orientado (começando em C) obtido quando se translada $AA'$ paralelamente até fazer A coincidir com C. Em termos mais precisos: dados os pontos A, $A'$ e C, quer-se obter $C'$ tal que $AA'$ e $CC'$ sejam os lados opostos de um paralelogramo cujos outros lados opostos são AC e $A'C'$. Pomos $C' = (x, y)$ e nos propomos a calcular x e y.

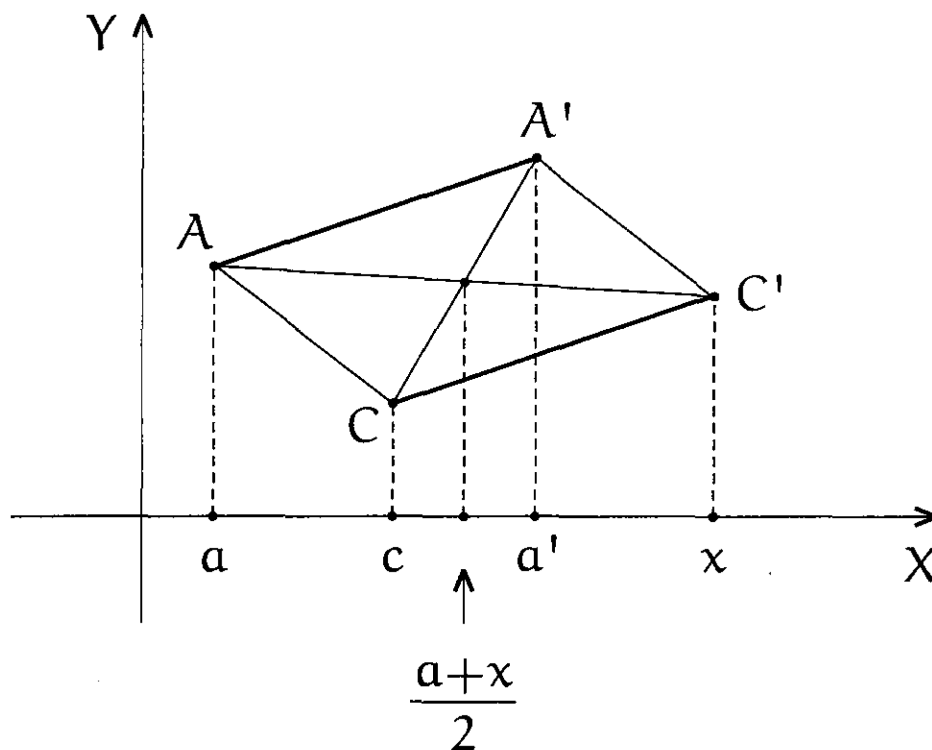



**Figura 8**

Da Geometria Plana, sabemos que as diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio. Assim os segmentos

$AC'$ e $A'C$ têm o mesmo ponto médio. Isto nos dá

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a'+c}{2} \quad \text{e} \quad \frac{b+y}{2} = \frac{b'+d}{2}.$$

Daí $x = c + (a' - a)$ e $y = d + (b' - b)$.

Em particular, se transladarmos paralelamente o segmento $AA'$ até fazer o ponto $A$ coincidir com a origem $O = (0,0)$ do sistema de coordenadas então o ponto $A'$ cairá sobre $C' = (a' - a, b' - b)$.

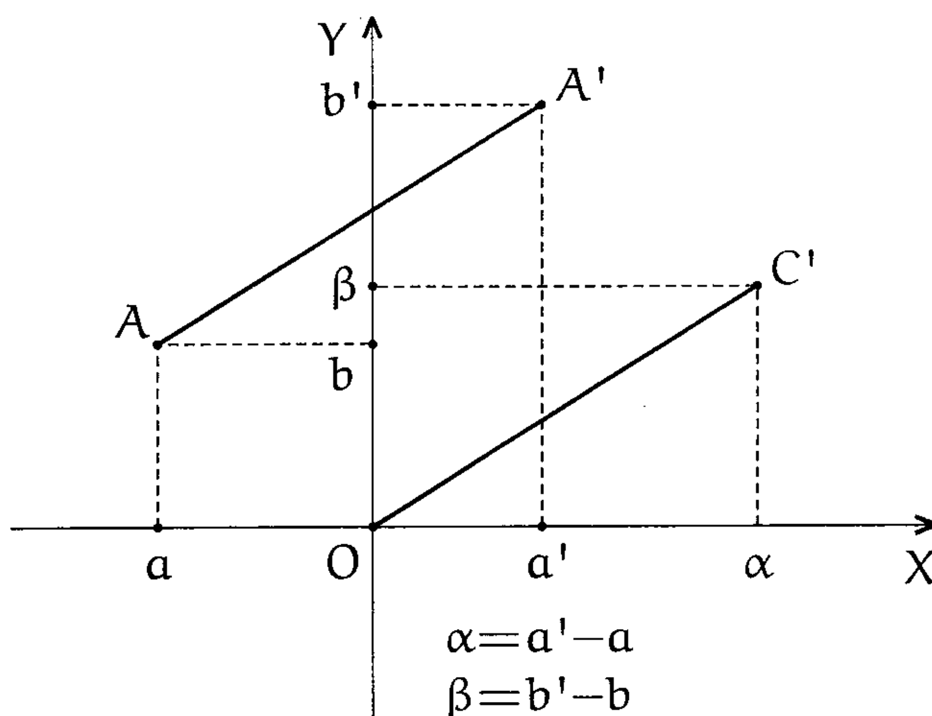



**Figura 9**

Nas condições da discussão acima, costuma-se dizer que os segmentos $AA'$ e $CC'$ são *equipolentes*. Portanto, se $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$ os segmentos $AA'$, $CC'$, não situados sobre a mesma reta, são equipolentes se, e somente se, tem-se

$$a' - a = c' - c \quad \text{e} \quad b' - b = d' - d.$$

Quando os dois segmentos estão sobre a mesma reta, diremos ainda que eles são equipolentes quando estas igualdades se verificarem. Em qualquer caso, estas igualdades significam que $AC'$ e $A'C$ têm o mesmo ponto médio.

## 4. A distância entre dois pontos

Se os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (x', y)$ têm a mesma ordenada $y$ então a distância $d(P, Q)$ entre eles é igual à distância $|x' - x|$ entre suas projeções sobre o eixo OX. Analogamente, se $P = (x, y)$ e $Q' = (x, y')$ têm a mesma abcissa $x$ então $d(P, Q)' = |y' - y| =$ distância entre as projeções de P e Q sobre o eixo OY.

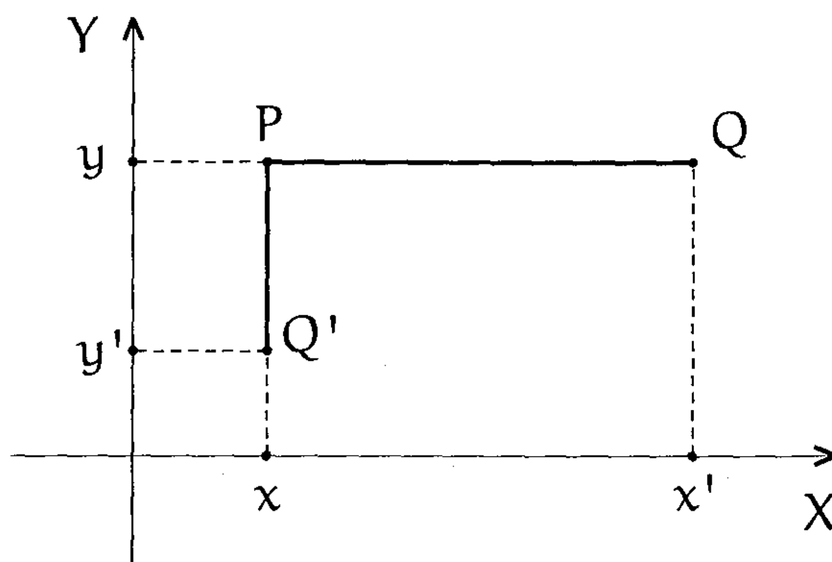



**Figura 10**

Se, entretanto, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ têm abcissas e ordenadas diferentes então, considerando o ponto $S = (u, y)$, vemos que PSQ é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é PQ. Como P e S têm a mesma ordenada, enquanto S e Q têm a mesma abcissa, segue-se que

$$d(P, S) = |x - u| \quad \text{e} \quad d(S, Q) = |y - v|.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S, Q)^2.$$

Portanto,

$$d(P, Q)^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2,$$

logo

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

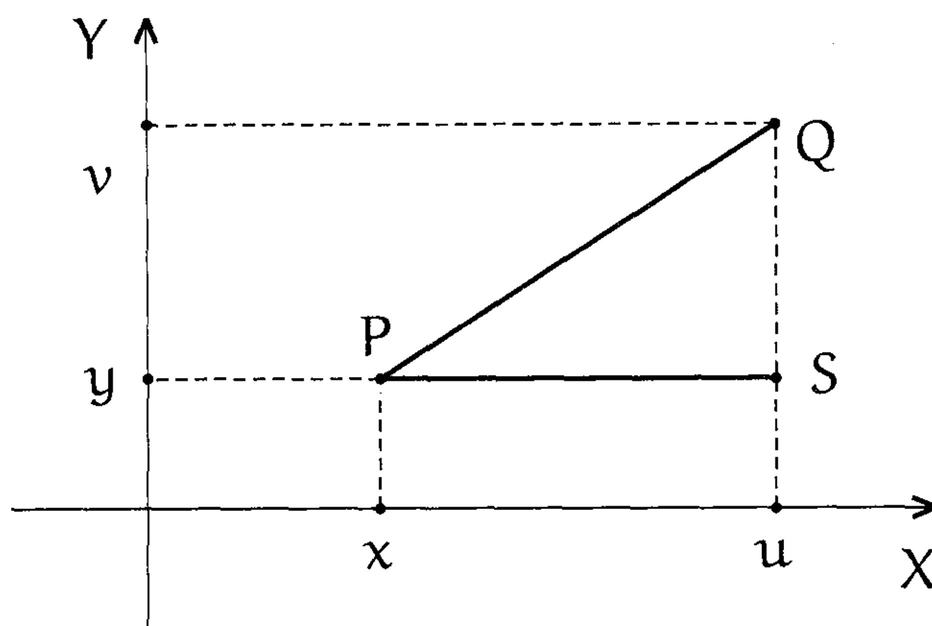



**Figura 11**

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y)$ à origem $O = (0, 0)$ é

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A fórmula da distância entre dois pontos, dada em termos das coordenadas desses pontos, serve de partida para um grande número de resultados da Geometria Analítica.

Vejamos um exemplo. Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, qual é a condição, em termos dessas coordenadas, que assegura o perpendicularismo dos segmentos $OP$ e $OQ$, onde $O = (0, 0)$ é a origem?

Pelo Teorema de Pitágoras, os segmentos $OP$ e $OQ$ são perpendiculares se, e somente se,

$$d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2.$$

A fórmula da distância entre dois pontos nos permite escrever esta equação como

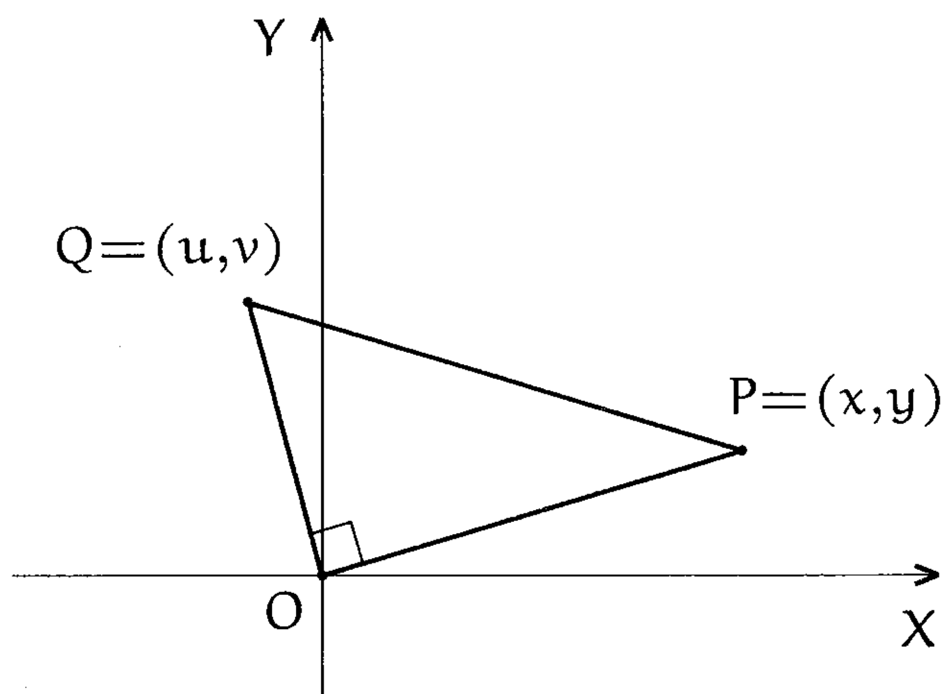



**Figura 12**

$$(x-u)^2+(y-v)^2=x^2+y^2+u^2+v^2,$$

ou seja:

$$x^2-2ux+u^2+y^2-2vy+v^2=x^2+y^2+u^2+y^2.$$

Simplificando:

$$-2ux-2vy=0$$

e daí

$$ux+vy=0.$$

A igualdade $ux+vy=0$ expressa portanto a condição necessária e suficiente para que os segmentos $OP$ e $OQ$ sejam perpendiculares, quando $O$ é a origem, $P=(x,y)$ e $Q=(u,v)$.

Mais geralmente, sejam $A=(a,b)$, $A'=(a',b')$, $C=(c,d)$ e $C'=(c',d')$, com $A\neq A'$ e $C\neq C'$. Qual é a condição em termos dessas coordenadas que assegura serem perpendiculares os segmentos de reta $AA'$ e $CC'$?

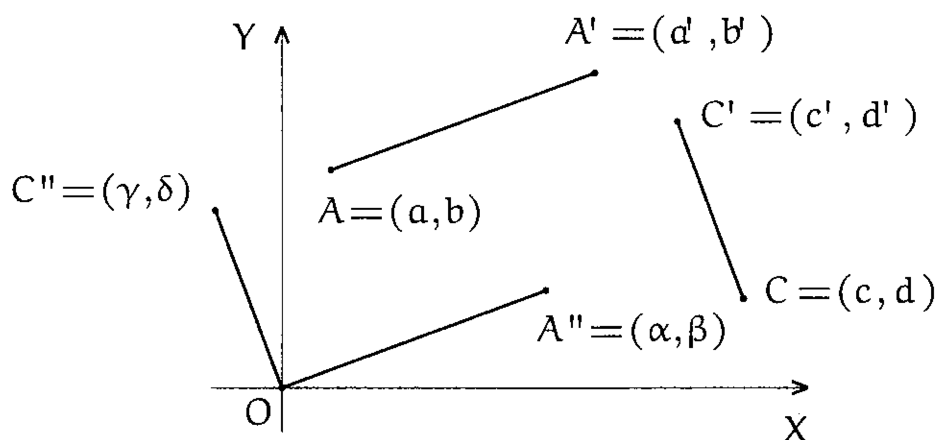



**Figura 13**

Transladando paralelamente os segmentos $AA'$ e $CC'$ de modo a fazer os pontos A e C coincidirem com a origem $O = (0,0)$, obtemos os pontos $A'' = (\alpha, \beta)$ e $C'' = (\gamma, \delta)$ tais que $OA''$ é paralelo a $AA'$ e $OC''$ é paralelo a $CC'$. Como vimos no final da seção 3, $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$, $\gamma = c' - c$, $\delta = d' - d$. Além disso, os segmentos $AA'$ e $CC'$ são perpendiculares se, e somente se, $OA'' \perp OC''$, ou seja $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

Assim, a condição de perpendicularismo dos segmentos de reta $AA'$ e $CC'$ se exprime, em termos das coordenadas dos pontos extremos desses segmentos, como

$$(a' - a)(c' - c) + (b' - b)(d' - d) = 0.$$

A condição de perpendicularismo é um caso particular da fórmula que dá o cosseno do ângulo entre duas direções. Com efeito, duas retas são perpendiculares se, e somente se, o cosseno do ângulo entre elas é igual a zero. Levados por esta observação, comecemos com uma situação especial.

Sejam $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ pontos situados à distância 1 da origem $O = (0,0)$. Então, se $\alpha$ e $\beta$ são, respectivamente, as medidas em radianos dos ângulos do eixo OX com os segmentos OP e OQ, temos $x = \cos\alpha$, $y = \operatorname{sen}\alpha$, $u = \cos\beta$ e $v = \operatorname{sen}\beta$. O ângulo do segmento OP com o segmento OQ mede então $\theta = \beta - \alpha$ radianos. Como vimos no Vol. 1 (pag. 225) tem-se

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha = ux + vy.$$

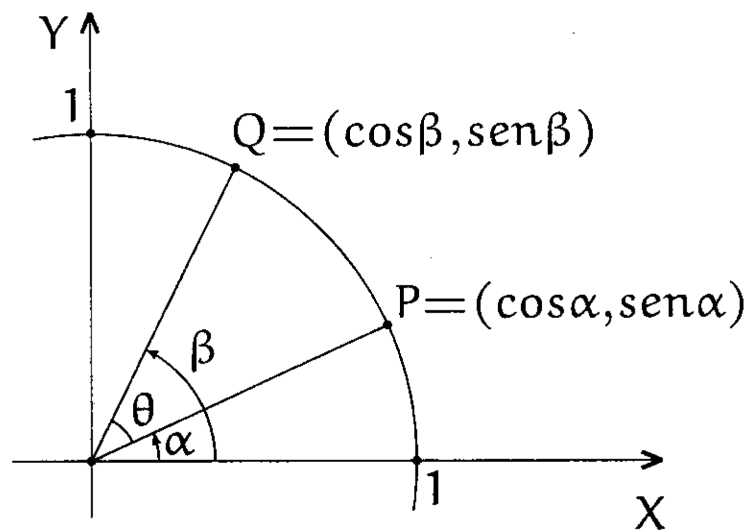



**Figura 14**

Se, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ forem pontos diferentes de $O = (0, 0)$ mas os comprimentos dos segmentos $OP$ e $OQ$ não forem necessariamente iguais a 1, tomamos

$$s = 1/\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad t = 1/\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Então os pontos $P' = (sx, sy)$ e $Q' = (tu, tv)$ estão sobre os segmentos $OP$ e $OQ$ respectivamente, agora com $d(O, P') = d(O, Q') = 1$.

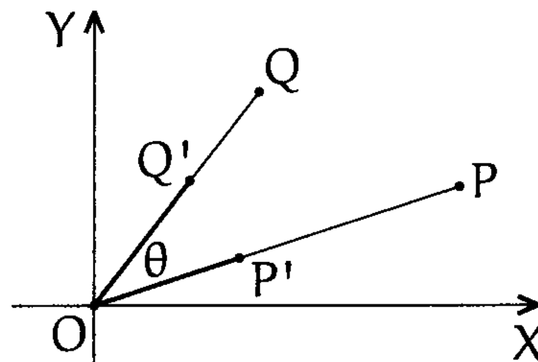



**Figura 15**

O ângulo $\theta$ entre $OP$ e $OQ$ é o mesmo que entre $OP'$ e $OQ'$. Do que acabamos de ver resulta então que $\cos\theta = tu \cdot sx + tv \cdot sy = st(ux + vy)$, ou seja, que

$$\cos\theta = \frac{ux + vy}{\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot$$

Esta é, portanto, a fórmula do cosseno do ângulo entre os segmentos de reta OP e OQ, onde $O = (0,0)$, $P = (x,y)$ e $Q = (u,v)$. Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, é indiferente considerar o ângulo orientado de OP para OQ ou vice-versa.

Se, tivermos dois segmentos de reta $AA'$ e $CC'$, com extremidades distintas, e quisermos obter o cosseno do ângulo entre eles em função das coordenadas $A = (a,b)$, $A' = (a',b')$, $C = (c,d)$ e $C' = (c',d')$, transladaremos esses segmentos de modo a fazer A e C cairem sobre O, obtendo assim os segmentos $OA''$ e $OC''$, paralelos a $AA'$ e $CC'$ respectivamente. O ângulo entre $AA'$ e $CC'$ será o mesmo que entre $OA''$ e $OC''$. Como já vimos, tem-se $A'' = (a'-a, b'-b)$ e $C'' = (c'-c, d'-d)$. Portanto, se $\theta$

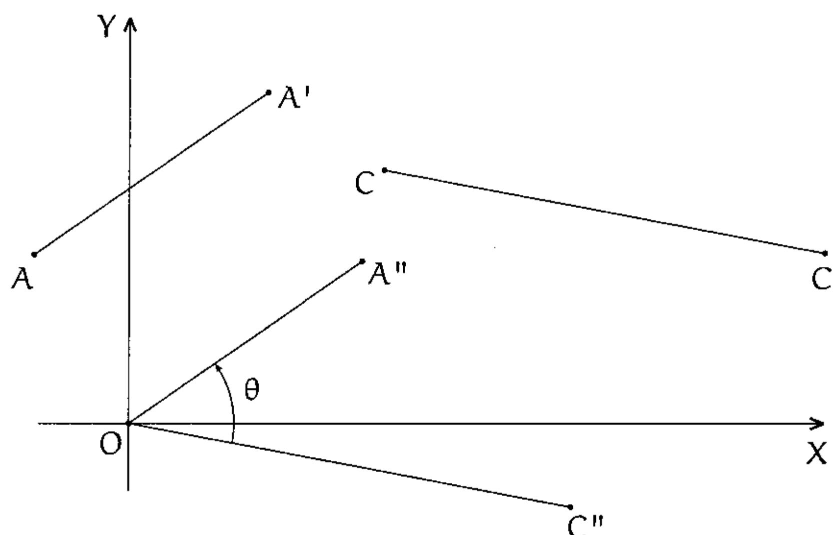



**Figura 16**

é o ângulo entre $AA'$ e $CC'$, tem-se

$$(4.6) \qquad \cos\theta = \frac{(a'-a)(c'-c)+(b'-b)(d'-d)}{\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}\cdot\sqrt{(c'-c)^2+(d'-d)^2}}.$$

Deve-se observar que se os segmentos $AA'$ e $CC'$ têm extremidades distintas, o ângulo $\theta$ entre eles só fica bem definido quando os orientamos, isto é, quando especificamos em cada um deles qual é o ponto inicial e qual o ponto final. No argumento acima, a discussão admitiu tacitamente que os pontos iniciais dos segmentos $AA'$ e $CC'$ são A e C. Caso $A'$ fosse o ponto inicial do primeiro

segmento e C do segundo, o ângulo entre eles seria o suplemento de $\theta$ e o cosseno mudaria de sinal.

Portanto, a fórmula acima dá o cosseno do ângulo entre dois segmentos *orientados*. Caso os segmentos dados tenham uma extremidade comum (como OP e OQ acima), esta extremidade é, naturalmente, tomada como o ponto inicial de ambos.

## 5. Escolhendo o sistema de coordenadas

Até agora, em todas as questões que abordamos, temos considerado um sistema de coordenadas fixado no plano, o que nos permite identificar os pontos desse plano com elementos de $\mathbb{R}^2$ e desta maneira temos traduzido algumas propriedades geométricas em termos de relações numéricas entre essas coordenadas.

Mas se temos um problema geométrico (que não menciona coordenadas) e queremos resolvê-lo usando Geometria Analítica, temos a liberdade de introduzir no plano o sistema de coordenadas que acharmos mais conveniente para o nosso problema. Vejamos um exemplo bastante simples.

Seja ABC um triângulo retângulo cuja hipotenusa é BC. Seja M o ponto médio de BC. Queremos mostrar que o comprimento da mediana AM é igual à metade do comprimento da hipotenusa.

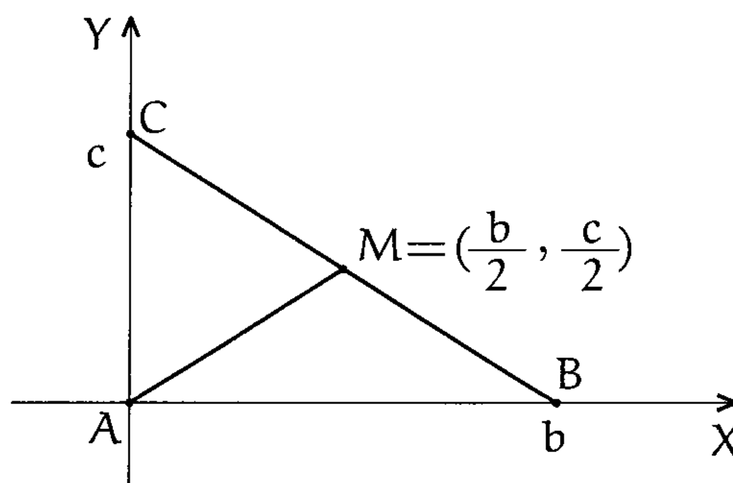



**Figura 17**

Um sistema de coordenadas conveniente para este problema é aquele em que as retas AB e AC são os eixos, portanto $A = (0, 0)$,

$B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$ são as coordenadas dos vértices. Então $M = (b/2, c/2)$. O comprimento da hipotenusa é

$$d(B, C) = \sqrt{b^2 + c^2}$$

e o comprimento da mediana é

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2},$$

o que prova a afirmação feita.

Uma escolha menos óbvia, mas ainda adequada para esta questão, é tomar um sistema de coordenadas cujo eixo OX contenha a hipotenusa, sendo a origem o ponto M, Agora temos $B = (-b, 0)$, $C = (b, 0)$, $A = (x, y)$. A condição de perpendicularismo entre AB e AC nos dá

$$(x - b)(x + b) + y^2 = 0,$$

ou seja, $x^2 - b^2 + y^2 = 0$, e daí $x^2 + y^2 = b^2$, o que significa

$$d(A, M)^2 = d(M, B)^2 = d(M, C)^2.$$

Portanto $d(A, M) = \frac{1}{2}\, d(B, C)$.

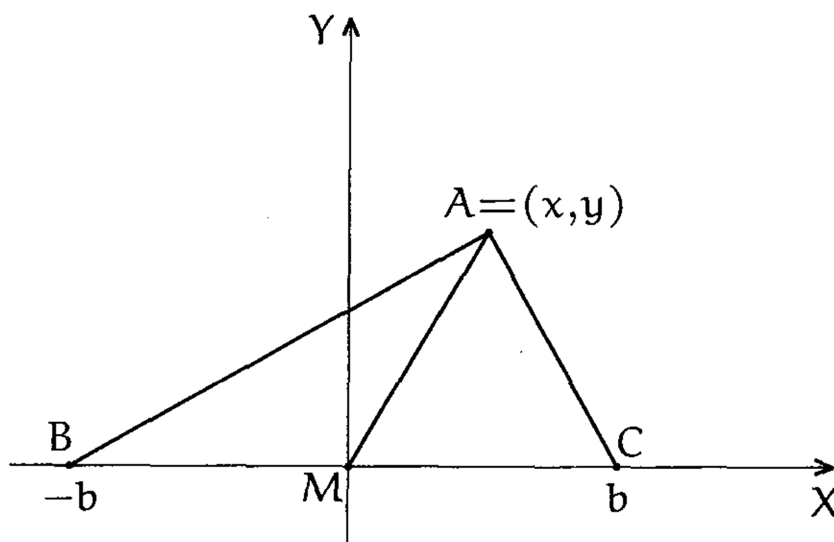



**Figura 18**

Outra situação geométrica que pode ser resolvida com o auxílio de coordenadas, de forma extremamente elementar, é a seguinte: dados os pontos A e B no plano, determinar o conjunto dos pontos X tais que $d(X, A) = d(X, B)$ (pontos equidistantes de A e B).

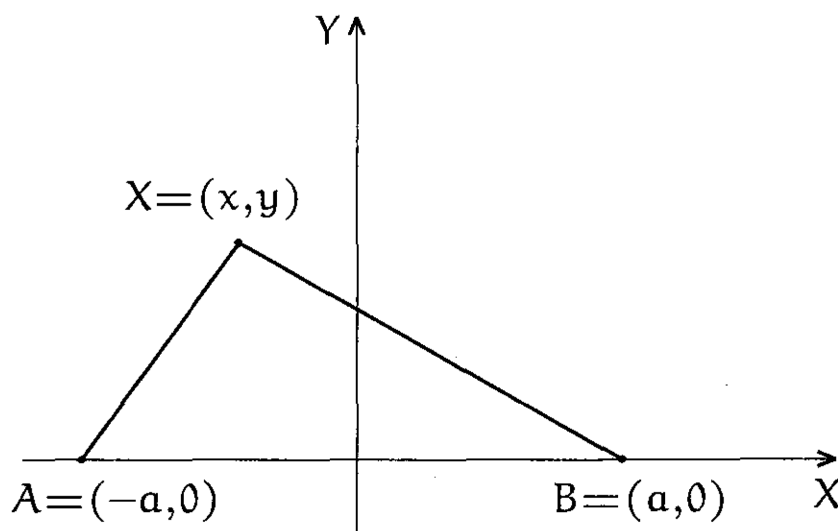



**Figura 19**

Para responder a esta solicitação consideramos um sistema de coordenadas no qual o eixo OX contém o segmento AB e a origem O é o ponto médio desse segmento. Neste sistema, as coordenadas dos pontos dados são $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$, com $a > 0$. O ponto $X = (x, y)$ é equidistante de A e B se, e somente se, $d(X, A)^2 = d(X, B)^2$, isto é

$$(x + a)^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Simplificando, vem $-2ax = 2ax$. Como $a \neq 0$, tem-se $x = 0$.

Portanto, os pontos do plano que são equidistantes de A e B são aqueles que estão sobre o eixo OY do sistema que escolhemos. Ora, esse eixo é a perpendicular ao segmento AB passando pelo seu ponto médio, ou seja, é a mediatriz deste segmento.

No próximo exemplo, temos um triângulo ABC e o problema consiste em provar que as três alturas desse triângulo se encontram no mesmo ponto.

Tomamos no plano o sistema de coordenadas no qual o eixo OX contêm o lado AB e o eixo OY contém a altura baixada do vértice

C sobre esse lado. Neste sistema, as coordenadas dos

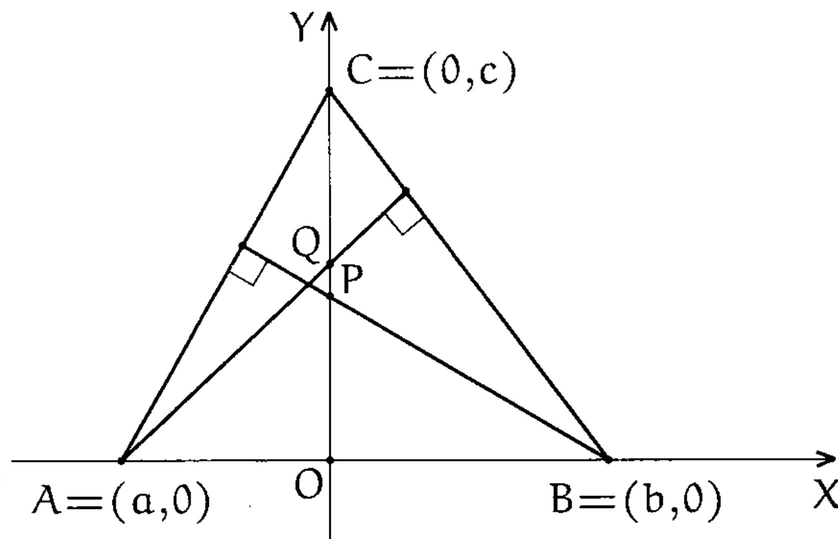



**Figura 20**

vértices A, B e C são $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$, onde $c \neq 0$. A altura baixada do vértice B encontra a altura OC no ponto $P = (0, y)$, Os segmentos BP e AC são perpendiculares. Utilizando-se a condição de perpendicularismo de dois segmentos obtemos $(a-0)(b-0)+(0-c)(0-y) = 0$, ou seja, $ab+cy = 0$. Por sua vez, a altura baixada do vértice A encontra a altura OC no ponto $Q = (0, z)$. Novamente, os segmentos AQ e BC são perpendiculares e utilizando a mesma relação obtemos $(b-0)(a-0)+(0-c)(0-z) = 0$, ou seja, $ab + cz = 0$. Vemos então que

$$z = y = -\frac{ab}{c}$$

e portanto,

$$P = Q = \left(0, -\frac{ab}{c}\right)$$

é o ponto de encontro das três alturas do triângulo ABC.

No exemplo a seguir temos um retângulo ABCD, no qual o lado AB mede o dobro do lado BC e perguntamos qual é o menor ângulo formado por suas diagonais, isto é, qual a medida do ângulo entre os segmentos orientados AC e DB.

Escolhemos como origem o vértice A, ficando o vértice B sobre o eixo das abcissas e D sobre o das ordenadas.

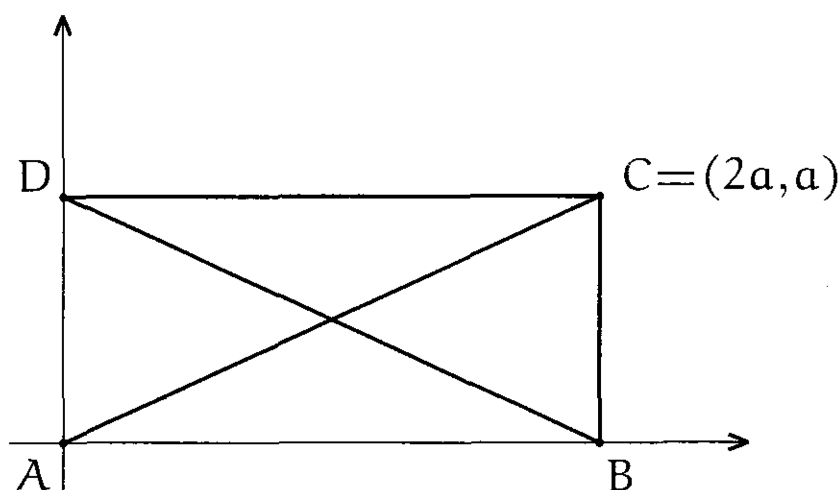



**Figura 21**

Assim teremos $A = (0,0)$, $B = (2a,0)$, $C = (2a,a)$ e $D = (0,a)$. O cosseno do menor ângulo formado pelas diagonais do retângulo é:

$$\cos\theta = \frac{(2a-0)(2a-0)+(a-0)(0-a)}{\sqrt{(2a)^2+a^2}\cdot\sqrt{(2a)^2+(-a)^2}} = \frac{3}{5},$$

logo $\theta = 53°7'48''$.

## 6. As equações da reta

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas no plano, as curvas nesse plano passam a ser representadas por equações. Chama-se equação de uma curva C a uma igualdade envolvendo as variáveis $x$, $y$ a qual é satisfeita se, e somente se, o ponto $P = (x, y)$ pertence à curva C.

Por exemplo, $x = y$ é a equação da bissetriz comum ao primeiro e terceiro quadrantes, isto é, da diagonal $\Delta$, porque o ponto $P = (x, y)$ pertence a $\Delta$ se, e somente se, $x = y$. Analogamente, $x = -y$ é a equação da reta $\Delta'$, bissetriz comum ao segundo e quarto quadrantes. Outros exemplos óbvios de equações que definem retas são $x = a$, que define a reta vertical (paralela oa eixo OY) em que todos os pontos têm a mesma abcissa $a$, e a equação $y = b$,

que define a reta horizontal onde todos os pontos têm ordenada $b$.

Há três tipos principais de equações que definem retas no plano.

## A) A equação $y = ax + b$

Como vimos no Vol. 1, dado o ponto $P = (x, y)$ no plano, tem-se $y = ax + b$ se, e somente se, $P$ pertence à reta $r$ que tem inclinação (ou coeficiente angular) $a$ e corta o eixo $OY$ no ponto $(0, b)$, de ordenada $b$. Vemos assim que este tipo de equação só pode ser usado para representar retas que não são paralelas ao eixo $OY$, isto é, retas não-verticais.

Lembramos ainda que a inclinação de uma reta não-vertical $r$ é o número

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

onde $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ são pontos de $r$ com abcissas distintas $x_1$ e $x_2$. Este número $a$ é o mesmo, não importa que pontos $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ se tomem sobre a reta $r$ (com $x_1 \neq x_2$) pois ele é a tangente trigonométrica do ângulo $\alpha$ que o eixo $OX$ forma com a reta $r$.

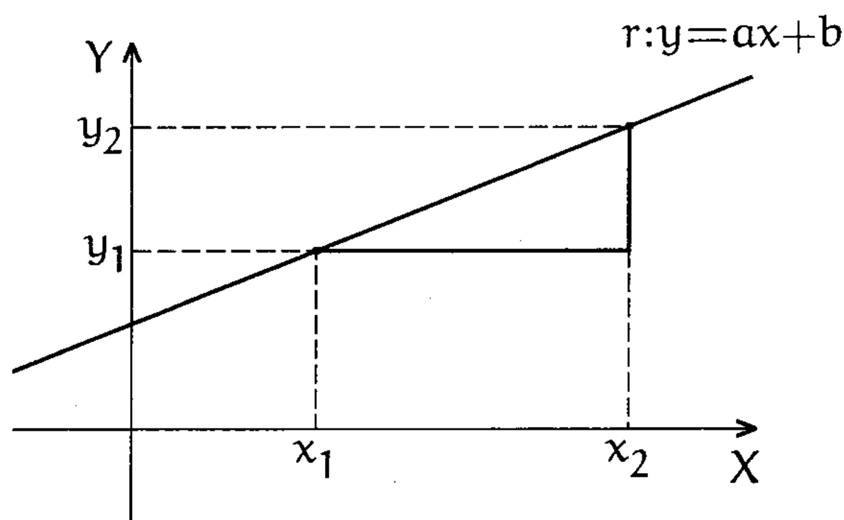



**Figura 22**

Ao representar a reta não-vertical $r$ pela equação $y = ax + b$ estamos dizendo que $r$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$y = ax + b$. Isto significa que $r$ é o gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$.

Por simplicidade, escreve-se muitas vezes "a reta $y = ax + b$" em vez de "a reta representada pela equação $y = ax + b$".

A interseção das retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ é o ponto $P = (x, y)$ cujas coordenadas são soluções do sistema

$$\begin{aligned} -ax + y &= b \\ -a'x + y &= b'. \end{aligned}$$

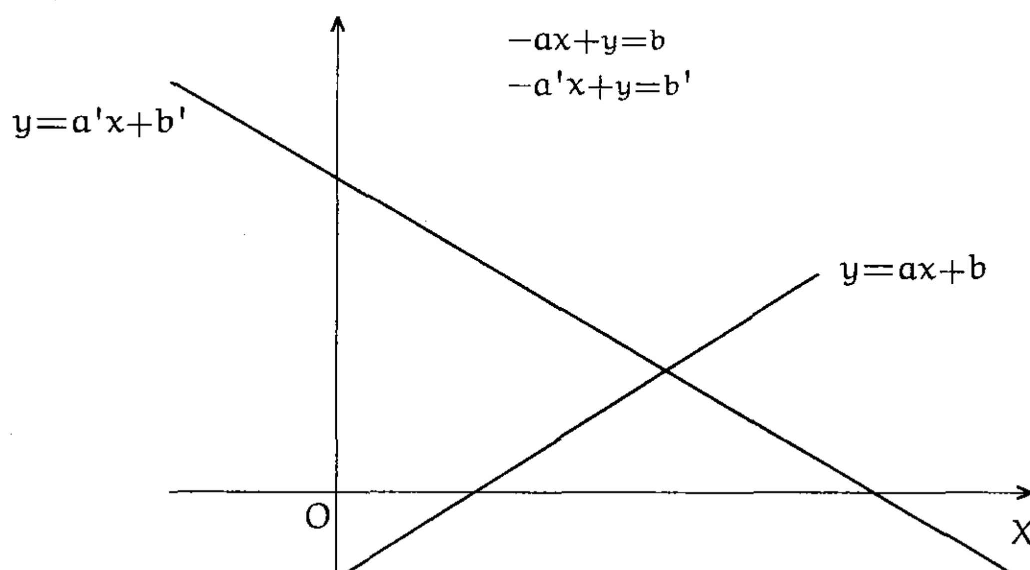



**Figura 23**

As retas dadas são paralelas quando não existe um ponto $P = (x, y)$ comum a ambas, ou seja, quando o sistema acima não possui solução. Ora, este sistema é equivalente a

$$\begin{aligned} -ax + y &= b \\ (a - a')x &= b' - b, \end{aligned}$$

o qual é desprovido de solução se, e somente se, $a = a'$ e $b \neq b'$.

Portanto, as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são paralelas se, e somente se, possuem a mesma inclinação $a$ e cortam o eixo OY em pontos distintos, de ordenadas $b \neq b'$.

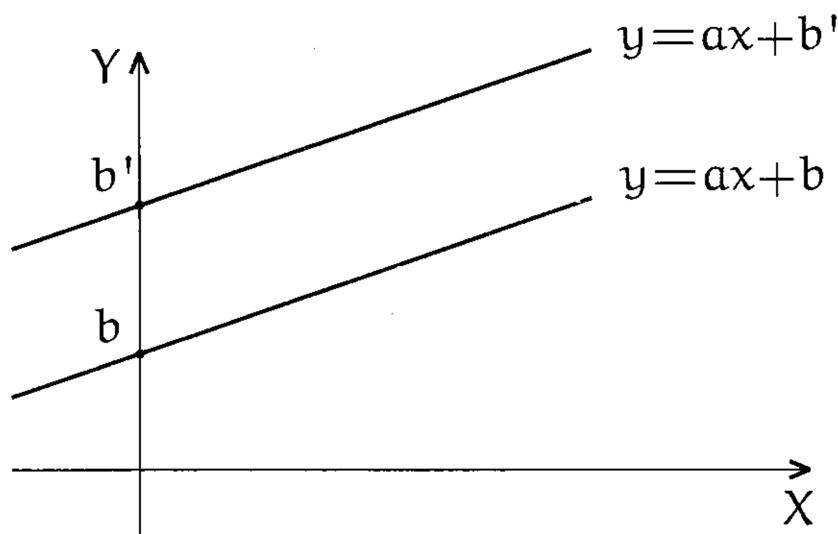



**Figura 23a**

É claro que o enunciado acima, de natureza geométrica, dispensa maiores considerações para concluir que as relações $a = a'$ e $b \neq b'$ caracterizam o paralelismo das retas dadas. Mas o raciocínio em termos de equações lineares contribui para ilustrar o método analítico de resolver questões de Geometria.

A equação $y = ax + b$ põe em relevo a ordenada $b$ do ponto em que a reta corta o eixo OY, ou seja, do ponto da reta que tem abcissa zero. Às vezes, porém, a informação que se tem diz respeito a outra abcissa $x_1$. Neste caso, a equação da reta se escreverá mais rapidamente se não nos preocuparmos em calcular explicitamente o valor de $b$.

Por exemplo, a equação da reta que tem inclinação $a$ e passa pelo ponto $P = (x_1, y_1)$ é

$$y = y_1 + a(x - x_1).$$

Com efeito, a equação procurada tem a forma $y = ax + b$, onde $a$ é dado mas $b$ não é conhecido. Entretanto sabemos que $y_1 = ax_1 + b$. Subtraindo membro a membro estas duas igualdades, obtemos $y - y_1 = a(x - x_1)$, donde $y = y_1 + a(x - x_1)$.

Esta equação tem um significado intuitivo bastante interessante: partindo do ponto de abcissa $x_1$ e ordenada $y_1$, obtemos um ponto $(x, y)$ qualquer da reta somando à ordenada inicial $y_1$

o acréscimo $a(x - x_1)$, igual ao acréscimo $x - x_1$, dado à abcissa, vezes a taxa de variação $a$ da ordenada como função da abcissa.

Daí resulta imediatamente a equação da reta que passa pelos dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. Se $x_1 = x_2$, a equação procurada é $x = x_1$ (ou $x = x_2$) e a reta é vertical. Supondo $x_1 \neq x_2$, a reta PQ tem inclinação $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ logo sua equação é

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ou

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

Os segundo membros destas duas equações são iguais. Na primeira, estamos dizendo que a reta passa pelo ponto $(x_1, y_1)$ com inclinação $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Na segunda, dizemos que a reta passa pelo ponto $(x_2, y_2)$ com a mesma inclinação.

Vejamos agora em que condições as retas $y = ax+b$ e $y = a'x+b'$ são perpendiculares. Isto equivale a perguntar quando as retas $y = ax$ e $y = a'x$, que passam pela origem O, são perpendiculares, pois estas são paralelas às primeiras. Tomando os pontos $P = (1, a)$ e $Q = (1, a')$ sobre estas retas, a questão se resume a saber se os segmentos OP e OQ são perpendiculares. Como vimos na seção 4, isto ocorre se, e somente se, $1 + aa' = 0$.

Portanto as retas $y = ax+b$ e $y = a'x+b'$ são perpendiculares se, e somente se, $a' = -1/a$.

Esta condição supõe, evidentemente, que $a$ e $a'$ são diferentes de zero. Mas é claro que se uma das retas dada for horizontal suas perpendiculares serão verticiais e o problema desaparece.

## B) A equação $ax + by = c$

Sempre que escrevermos a equação $ax + by = c$, estaremos supondo $a^2+b^2 \neq 0$ (isto é, $a$ e $b$ não simultaneamente nulos), mesmo que isto não seja dito explicitamente.

O conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by = c$ é uma reta. Com efeito, esta equação equivale a

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

quando $b \neq 0$ e a $x = \frac{c}{a}$ quando $b = 0$.

Se as equações $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ definem a mesma reta então $b = b'$ (ordenada do ponto em que esta reta corta o eixo OY) e $a = a'$ (inclinação da reta).

Em contraposição, para todo $k \neq 0$ as equações $ax + by = c$ e $ka \cdot x + kb \cdot y = kc$ definem a mesma reta.

Reciprocamente, se as equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ definem a mesma reta (isto é, possuem as mesmas soluções $(x, y)$) então existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$.

Com efeito, suponhamos $b \neq 0$. (Se fosse $a \neq 0$ o raciocínio seria análogo.) Isto equivale a dizer que a reta $ax + by = c$ não é vertical, logo $b' \neq 0$, pois $a'x + b'y = c'$ é a mesma reta, a qual é definida pelas equações $y = (-a/b)x + c/b$ e $y = -(a'/b')x + c'/b'$, portanto $a/b = a'/b'$ e $c/b = c'/b'$. Pondo $k = b'/b$ vem $b' = kb$, $a' = ka$ e $c' = kc$.

Em suma: as equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ definem a mesma reta se, e somente se, existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$.

E sob que condições as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ são paralelas?

Novamente suporemos $b \neq 0$. Se as retas dadas forem paralelas, isto implicará $b' \neq 0$ e elas serão representadas pelas equações $y = (-a/b)x + c/b$ e $y = (-a'/b)x + c'/b'$ respectivamente. Seu paralelismo equivale a dizer que $a/b = a'/b'$ e $c/b = c'/b'$. Pondo $k = b'/b$, segue-se que $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' \neq kc$. (O caso $a \neq 0$ é análogo.)

Reciprocamente, se existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$, as equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ não podem possuir uma solução comum $(x, y)$ pois $ax + by = c$ implicaria

$a'x + b'y = kc \neq c'$. Portanto as retas representadas por estas equações não possuem um ponto $(x, y)$ em comum, ou seja, são paralelas.

Em suma: as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ são paralelas se, e somente se, para algum $k \neq 0$, tem-se $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' \neq kc$.

Tendo interpretado os casos de retas coincidentes ou paralelas em termos dos coeficientes de suas equações, resta-nos o caso de retas concorrentes. Resulta então da discussão acima que as retas definidas pelas equações $ax+by = c$ e $a'x+b'y = c'$ têm um único ponto em comum se, e somente se, não existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$ e $b' = kb$.

A condição acima significa que os pontos $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$ e $O = (0, 0)$ não são colineares, pois sabemos que os pontos da reta $OA$ são todos da forma $A' = (ka, kb)$, como se viu na seção 4.

As condições $a' = ka$ e $b' = kb$ equivalem a $a'/b' = a/b$ quando $b$ e $b'$ são $\neq 0$ e a $b'/a' = b/a$ quando $a$ e $a'$ são $\neq 0$. Logo podemos exprimí-las como $ab' = ba'$, ou $ab' - ba' = 0$.

Então podemos dizer que as retas $ax+by = c$ e $a'x+b'y = c'$ são concorrentes se, e somente se, $ab' - ba' \neq 0$.

Esta análise da posição relativa de duas retas com base nos coeficientes das equações que as definem equivale ao estudo das soluções do sistema linear

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Podemos então dizer que este sistema possui uma única solução (a abcissa $x$ e a ordenada $y$ do ponto de interseção das duas retas) se, e somente se, $ab' - ba' \neq 0$, é indeterminado se, e somente se, para algum $k \neq 0$ tem-se $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e é impossível se, e somente se, $a' = ka$, $b' = kb$ mas $c' \neq kc$ para algum $k \neq 0$.

Uma informação geométrica importante a respeito da reta definida pela equação $ax + by = c$ é que ela é perpendicular ao

segmento de reta $OA$, onde $A = (a, b)$.

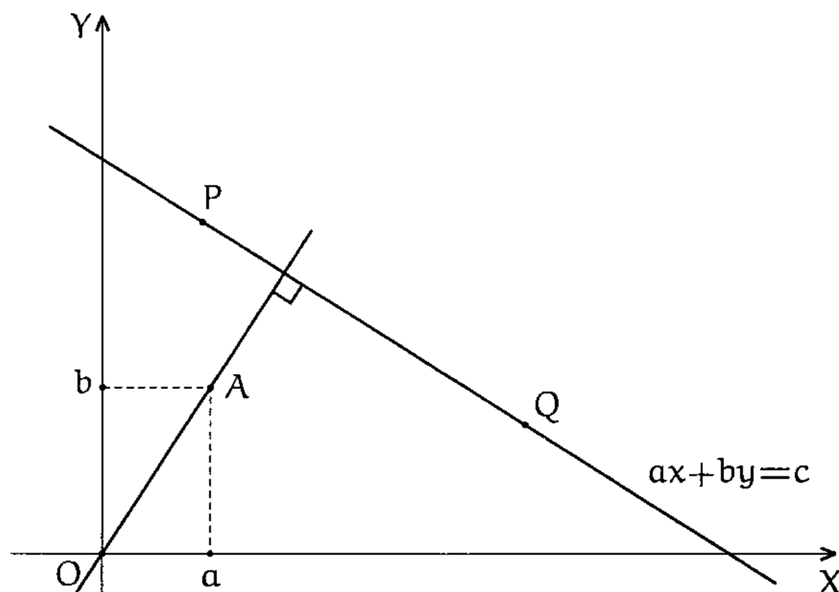



**Figura 24**

Para ver isto, consideremos dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ sobre esta reta. Então tem-se

$$ax_1 + by_1 = c \quad \text{e} \quad ax_2 + by_2 = c$$

logo

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0.$$

Esta igualdade significa que o segmento $OA$ é perpendicular a $PQ$, portanto à reta $ax + by = c$.

Mantendo $a$ e $b$ fixos e fazendo variar $c$, as diversas retas $ax + by = c$ assim obtidas são paralelas entre si, todas perpendiculares ao segmento $OA$, com $A = (a, b)$. Quando $c = 0$, a reta $ax + by = 0$ passa pela origem.

Evidentemente, uma outra reta $a'x + b'y = c'$, com $A' = (a', b')$ será perpendicular à primeira se, e somente se, $OA \perp OA'$, isto é, $aa' + bb' = 0$.

Portanto, $aa' + bb' = 0$ é condição necessária e suficiente para que as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ sejam perpendiculares.

Por exemplo, as retas $ax + by = c$ e $bx - ay = c'$ são perpendiculares, sejam quais forem $a$, $b$, $c$, $c'$.

## C) Equações paramétricas.

Dados os pontos distintos $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$, as equações

$$\begin{cases} x = (1-t)a + tc = a + t(c-a) \\ y = (1-t)b + td = b + t(d-b), \end{cases}$$

onde t assume todos os valores reais, chamam-se as *equações paramétricas* da reta AC. Elas descrevem a trajetória do ponto $(x, y)$, em função do parâmetro t, que pode ser pensado como o tempo. Para $t = 0$ temos $(x, y) = (a, b)$. Para $t = 1$, vale $(x, y) = (c, d)$. Se $a = c$ então $x \equiv a$ é constante e AC é vertical. Suponhamos $a \neq c$. Então, para todos os valores de t temos $t = (x-a)/(c-a)$, logo

$$y = b + \frac{d-b}{c-a}(x-a).$$

Portanto quando t assume todos os valores reais, o ponto $(x, y)$ descreve realmente a reta que passsa pelos pontos A e C.

Como exemplo do uso das equações paramétricas, consideremos o seguinte problema: dados $A = (0, 1)$ e $B = (m, 0)$, determinar os pontos $P = (x, y)$ da reta AB situados à distância 1 da origem.

As equações paramétricas da reta AB são:

$$\begin{cases} x = tm \\ y = 1 - t \end{cases}$$

Devemos determinar t de modo que se tenha $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, $t^2m^2 + (1-t)^2 = 1$. Esta equação significa

$$(1 + m^2)t^2 - 2t = 0,$$

logo os valores de t procurados são $t = 0$ e $t = \dfrac{2}{1+m^2}\cdot$ No primeiro caso, obtemos o ponto $(x, y) = (0, 1) = A$, o que era obviamente esperado. O segundo valor de t nos dá

$$x = \frac{2m}{1+m^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{m^2-1}{m^2+1}.$$

portanto o ponto

$$\left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$$

é o único outro ponto além de A que está sobre a reta AB e sua distância à origem O é igual a 1.

## 7. Ângulo entre duas retas

Duas retas $r$ e $r'$ que concorrem num ponto formam quatro ângulos. Dois quaisquer desses ângulos, ou são opostos pelo vértice, logo congruentes, ou são adjacentes com os lados exteriores em linha reta, logo suplementares. Assim, seus cossenos coincidem ou diferem apenas pelo sinal. Segue-se

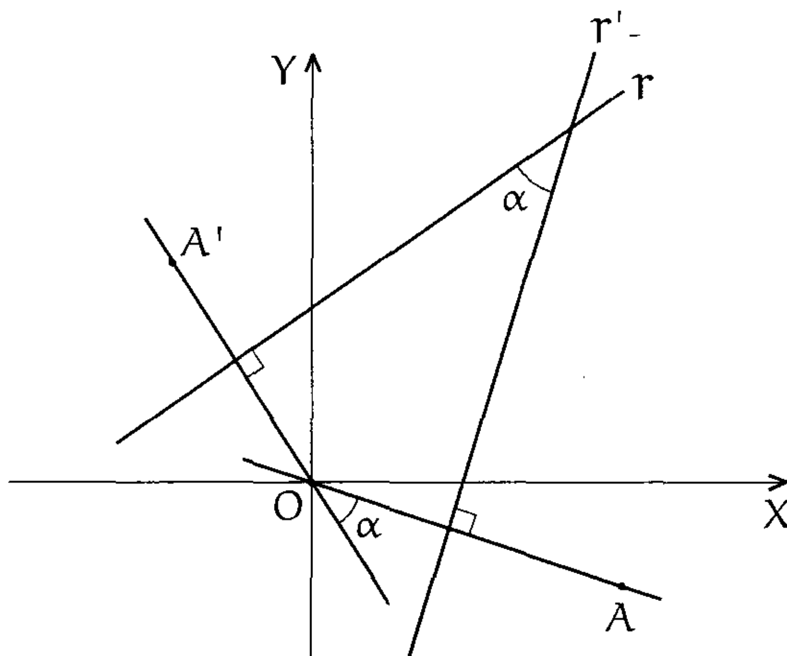



**Figura 25**

que, se $\alpha$ é qualquer um dos quatro ângulos formados por duas retas que se cortam num ponto, o valor absoluto $|\cos\alpha|$ está definido sem ambigüidade.

Se as duas retas são representadas pelas equações $ax+by=c$ e $a'x+b'y=c'$ então elas são perpendiculares respectivamente às retas OA e OA′, onde $O=(0,0)$, $A=(a,b)$ e $A'=(a',b')$. Portanto os quatro ângulos formados pelas retas dadas são con-

gruentes àqueles formados pelas retas OA e OA′. Assim, se $\alpha$ é um desses ângulos, podemos afirmar que

$$|\cos\alpha| = \frac{|aa' + bb'|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{(a')^2+(b')^2}}\,.$$

Novamente vemos que as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ são perpendiculares se, e somente se, $aa' + bb' = 0$.

## 8. Distância de um ponto a uma reta

Determinemos primeiramente a distância entre as retas paralelas $ax + by = c$ e $ax + by = c'$. Ambas são perpendicualres à reta $bx - ay = 0$, que passa pela origem e as corta nos pontos P e Q respectivamente. As coordenadas desses pontos são obtidas resolvendo os sistemas

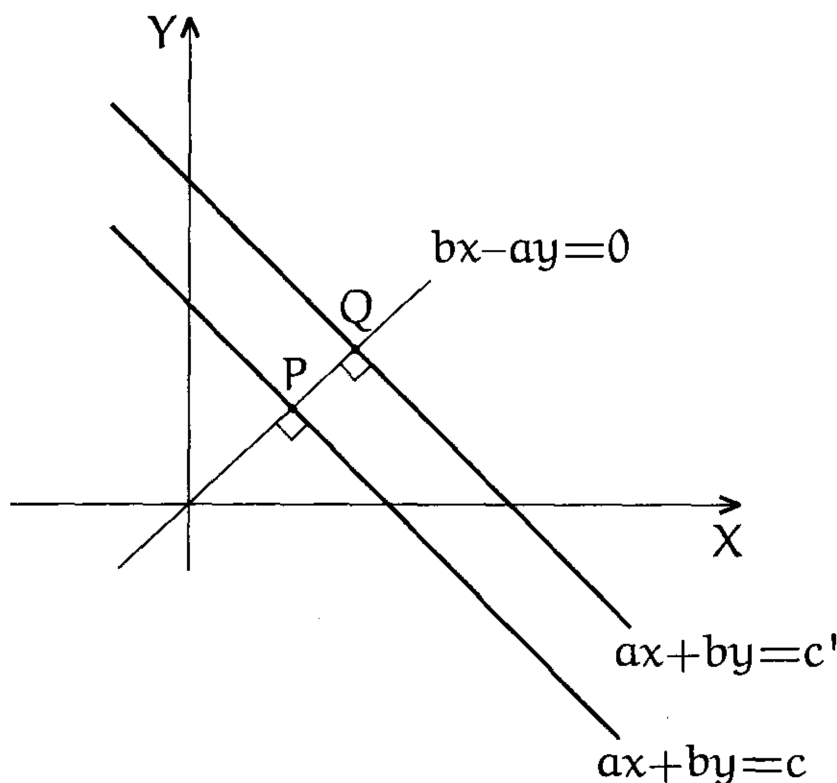



**Figura 26**

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = c' \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

Facilmente obtemos

$$P = \left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right) \quad e \quad Q = \left(\frac{ac'}{a^2+b^2}, \frac{bc'}{a^2+b^2}\right).$$

A distância entre as duas retas dadas é a distância entre os pontos $P$ e $Q$. Outro cálculo fácil nos dá

(8.1) $$d(P,Q) = \frac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Para calcular a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta $r$, dada por $ax+by = c$, observamos que a reta paralela a $r$ passando por $P$ tem a equação $ax+by = c'$, onde $c' = ax_0 + by_0$, e que a distância de $P$ a $r$ é igual à distância entre essas duas retas paralelas.

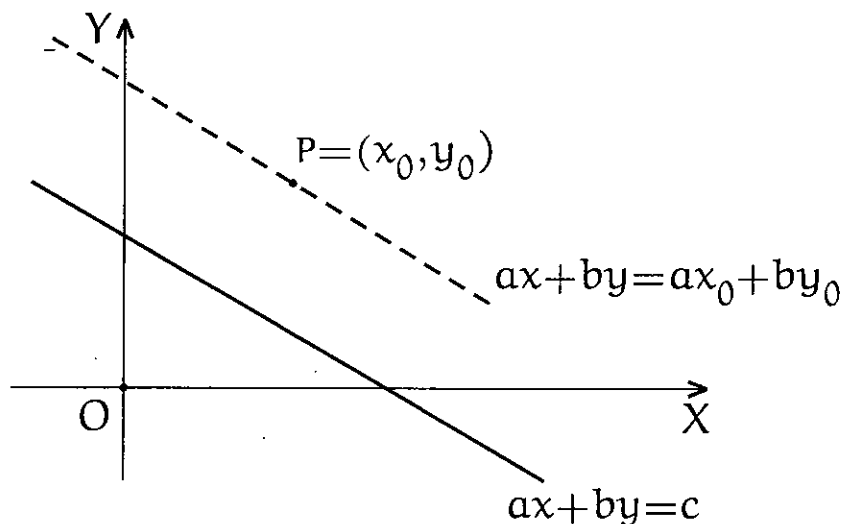



**Figura 27**

Pelo que acabamos de ver, tem-se então a expressão

(8.2) $$d(P,r) = \frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

para a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta $ax + by = c$.

Uma primeira aplicação da fórmula da distância de um ponto a uma reta é a obtenção das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas. Se $r$ e $r'$ tem equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ respectivamente, um ponto $P = (x, y)$ pertence à bissetriz de um

dos 4 ângulos formados se, e somente se possui mesma distância às duas retas.

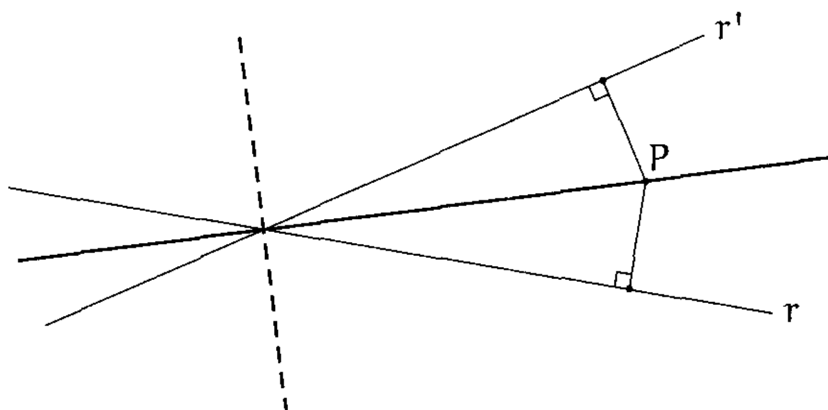



**Figura 28**

Portanto, as coordenadas de P devem satisfazer a equação

$$\frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y - c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Na realidade, existem aí duas retas. Cada uma é suporte para as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice. Pensando sinteticamente, é muito fácil perceber que essas bissetrizes são perpendiculares. Analiticamente, isto não é tão óbvio e a verificação desse fato é um dos exercícios que estão propostos no final do capítulo.

Vamos ver agora um problema em que a solução sintética possui alguma dificuldade (porque necessita de um pequeno truque), mas a solução analítica é completamente natural.

**Problema.** O ponto P pertence a um dos lados de um retângulo. Provar que a soma das distâncias de P às diagonais desse retângulo é constante.

a) Vamos inicialmente mostrar a solução sintética. Seja ABCD o retângulo e seja P um ponto do lado AB. Como mostra a figura abaixo, PH e PJ são perpendiculares às diagonais AC e BD, respectivamente.

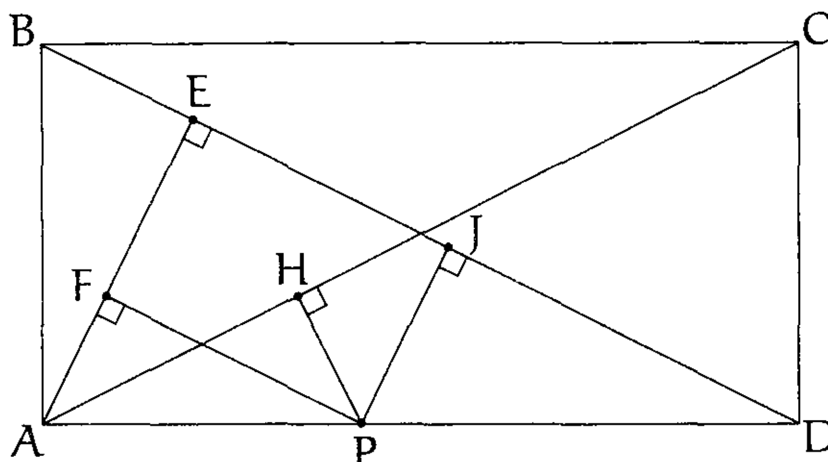



**Figura 29**

Tracemos AE perpendicular a BD e PF perpendicular a AE. Desta forma, PJEF é um retângulo e portanto,

(1) $$\mathsf{PJ} = \mathsf{FE}$$

Os triângulos APH e APF são congruentes porque são retângulos, com mesmo hipotenusa AP e ainda, $F\widehat{P}A = D\widehat{B}A = C\widehat{A}B$. Logo,

(2) $$\mathsf{PH} = \mathsf{AF}$$

De (1) e (2) resulta que

$$\mathsf{PJ} + \mathsf{PH} = \mathsf{AF} + \mathsf{FE} = \mathsf{AE} = \text{ constante.}$$

b) Vamos ver agora a solução analítica. É natural escolher um sistema de coordenadas onde
$A = (0, 0)$,
$B = (0, b)$, com $b > 0$,
$C = (a, b)$, com $a > 0$,
$D = (a, 0)$,
$P = (c, 0)$ com $0 \leqslant c \leqslant a$.

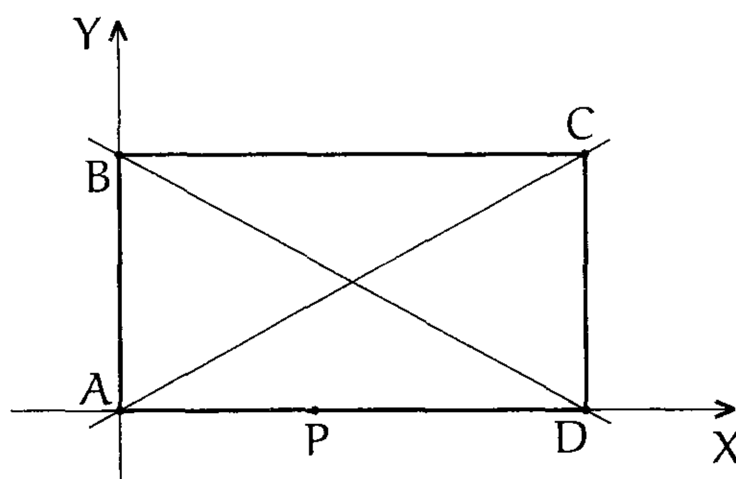



**Figura 29a**

A equação da reta AC é $bx - ay = 0$ e a equação da reta BD é $bx + ay = ab$. Somando as distâncias de P a cada uma dessas retas obtemos

$$\frac{|bc - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{constante}.$$

Observe ainda que essa constante nada mais é do que a distância do ponto A à reta BD.

Vamos ainda mostrar um outro exemplo de um problema de Geometria em que a solução analítica é bastante simples. O problema terá dados numéricos (para relaxar) e o caso geral é um dos problemas propostos.

**Problema.** Determinar o raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo de catetos 3 e 4.

Como a figura em questão possui um ângulo reto é natural pensarmos em estabelecer um sistema de coordenadas onde cada eixo contém um cateto.

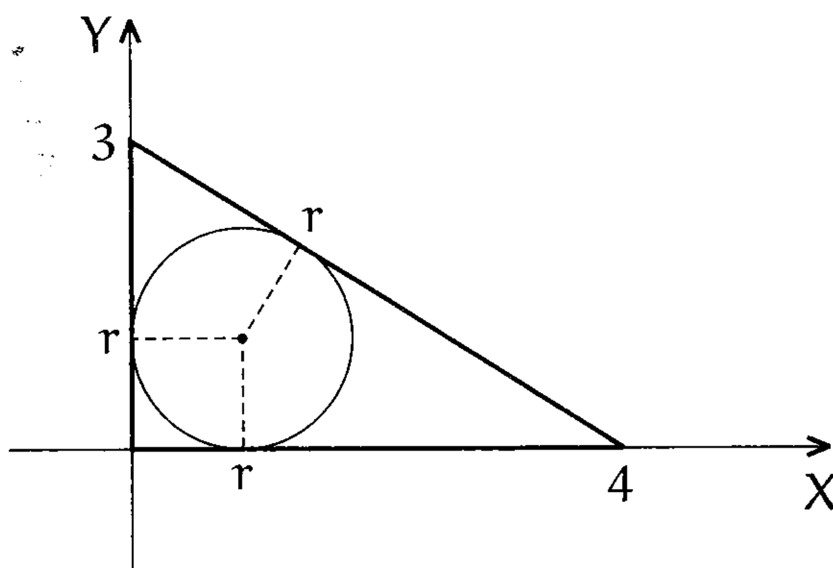



**Figura 30**

Se $r$ é o raio da circunferência tangente aos três lados do triângulo então a distância do ponto $(r, r)$ à reta

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

deve ser igual a $r$. Portanto,

$$\frac{|3r + 4r - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = r,$$

ou seja,

$$|7r - 12| = 5r,$$

o que fornece as soluções $r = 1$ e $r = 6$.

Observe que no nosso exemplo, a circunferência inscrita tem raio $r = 1$. A outra solução encontrada refere-se a uma outra circunferência que também é tangente aos eixos e a hipotenusa do triângulo, mas é exterior ao triângulo.

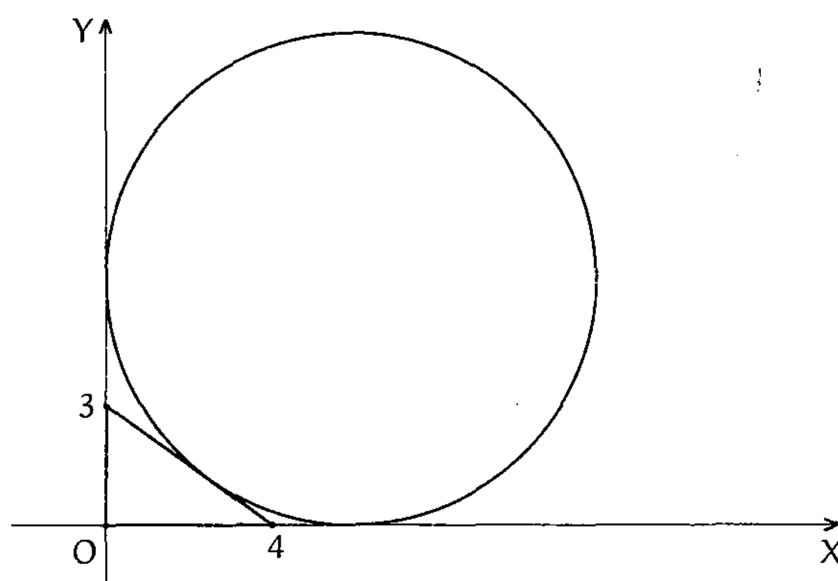



**Figura 31**

## 9. Área de um triângulo

Consideremos inicialmente um triângulo $A_1A_2A_3$ do qual o vértice $A_3 = (0,0)$ é a origem. Sejam $A_1 = (a_1, b_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que o lado $A_1A_3$ não é vertical, isto é, que $a_1 \neq 0$.

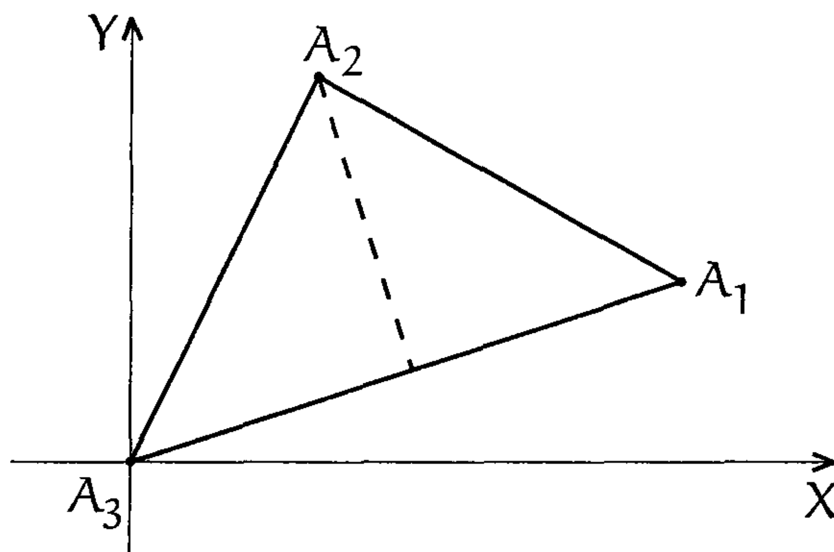



**Figura 32**

Seja $A_1A_3$ a base do triângulo. Assim, a distância de $A_2$ até a reta $A_1A_3$ é a sua altura. Como a equação da reta $A_1A_3$ é $b_1x -$

$a_1 y = 0$ temos:

$$\text{área de } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \frac{|b_1 a_2 - a_1 b_2|}{\sqrt{b_1^2 + (-a_1)^2}} = \frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

No caso geral, temos um triângulo $A_1A_2A_3$ onde os vértices $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$ e $A_3 = (a_3, b_3)$ são pontos quaisquer. A partir da origem O traçamos os segmentos OP e OQ, respectivamente equipolentes a $A_3A_1$ e $A_3A_2$, logo $P = (\alpha_1, \beta_1)$ e $Q = (\alpha_2, \beta_2)$, com $\alpha_1 = a_1 - a_3$, $\beta_1 = b_1 - b_3$, $\alpha_2 = a_2 - a_3$, $\beta_2 = b_2 - b_3$.

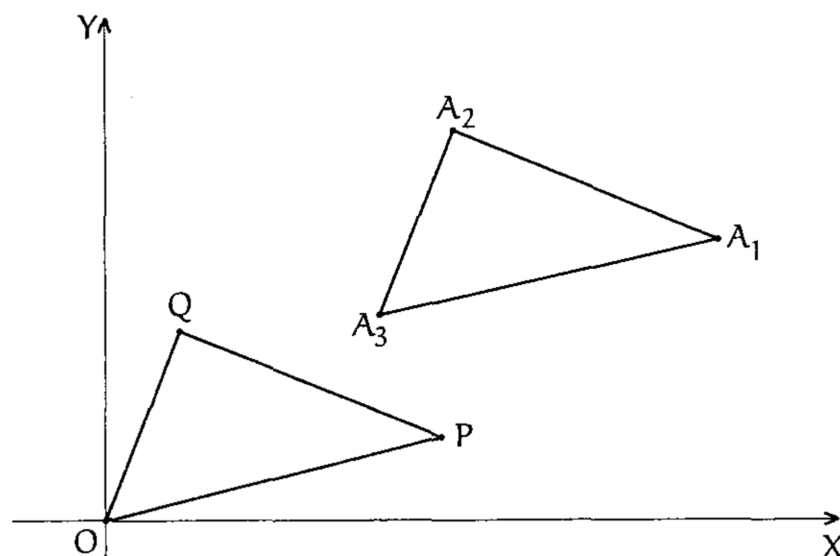



**Figura 33**

Então

$$\text{área de } A_1A_2A_3 = \text{ área de } OPQ = \frac{1}{2}|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|,$$

ou seja:

$$\text{área de } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}|(a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3)|.$$

## 10. Equação da circunferência

A circunferência de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$ é o conjunto $\Gamma$ formado pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $d(A, P) = r$. Assim

$P = (x, y)$ pertence a $\Gamma$ se, e somente se,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

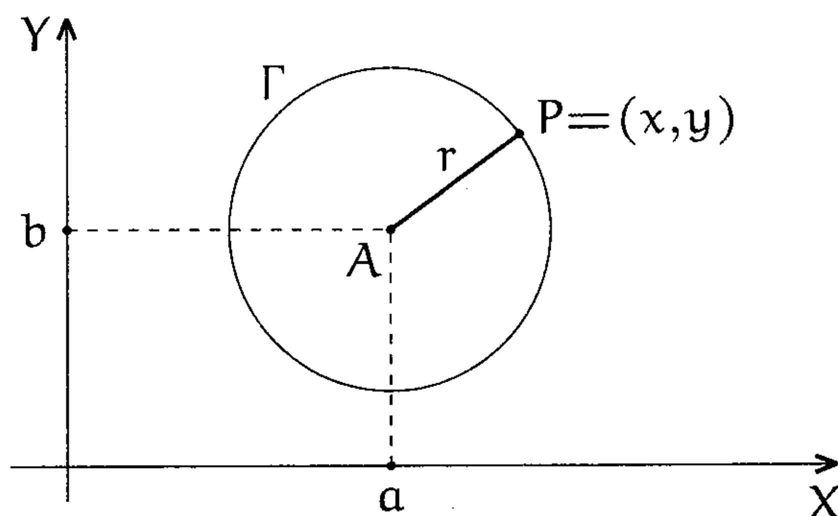



**Figura 33a**

Esta é, portanto, a equação da circunferência. No caso particular em que o centro da circunferência é a origem $O = (0, 0)$, a equação assume a forma simplificada

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Vejamos algumas questões geométricas simples que podem ser resolvidas com auxílio da equação da circunferência.

Primeira questão: que formas pode assumir a interseção de uma reta $\rho$ com uma circunferência $\Gamma$?

São dadas a reta $\rho$ e a circunferência $\Gamma$ mas não há referência a um sistema de coordenadas. Tomamos um sistema que tenha a origem $O$ no centro da circunferência, cujo raio é o número $r > 0$. Além disso, escolhemos o eixo $OX$ paralelo à reta $\rho$, cuja equação é então $y = a$, ou seja, todos os pontos de $\rho$

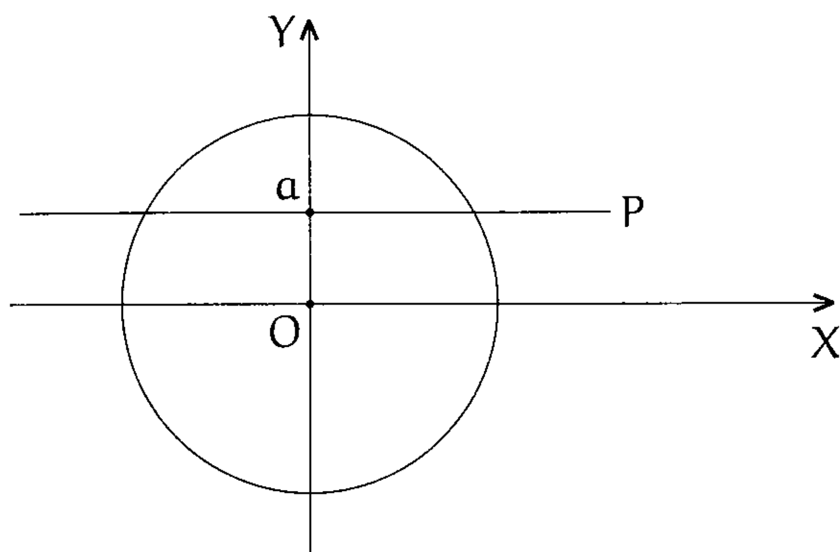



**Figura 34**

têm a mesma ordenada $a$. A interseção $\rho \cap \Gamma$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas cumprem simultaneamente as condições

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{e} \quad y = a.$$

Isto nos dá $x^2 = r^2 - a^2$. Há três possiblidades: Primeira: se $a^2 > r^2$, então $r^2 - a^2 < 0$, logo nenhum $x$ cumpre $x^2 = r^2 - a^2$, portanto $\rho \cap \Gamma = \varnothing$.

A segunda possibilidade é $a^2 = r^2$, logo $x = 0$ portanto a interseção $\rho \cap \Gamma$ consiste no único ponto $P = (0, a)$.

Finalmente, se $r^2 > a^2$ temos dois valores para $x$, a saber

$$x = \sqrt{r^2 - a^2} \quad \text{e} \quad x = -\sqrt{r^2 - a^2}$$

e a interseção $\rho \cap \Gamma$ é formada pelos dois pontos

$$P = (\sqrt{r^2 - a^2}, a), \quad Q = (-\sqrt{r^2 - a^2}, a).$$

Consideremos agora a interseção $\Gamma \cap \Gamma'$ de duas circunferências distintas. De saida, excluímos o caso em que $\Gamma$ e $\Gamma'$ são concêntricas pois isto daria $\Gamma \cap \Gamma' = \varnothing$, ou $\Gamma \cap \Gamma' = \Gamma = \Gamma'$.

Tomamos um sistema de coordenadas cuja origem $O$ é o centro da circunferência $\Gamma$ e cujo eixo $OX$ contém o centro $O' = (a, 0)$ de $\Gamma'$. Sem perda de generalidade, podemos supor $a > 0$,

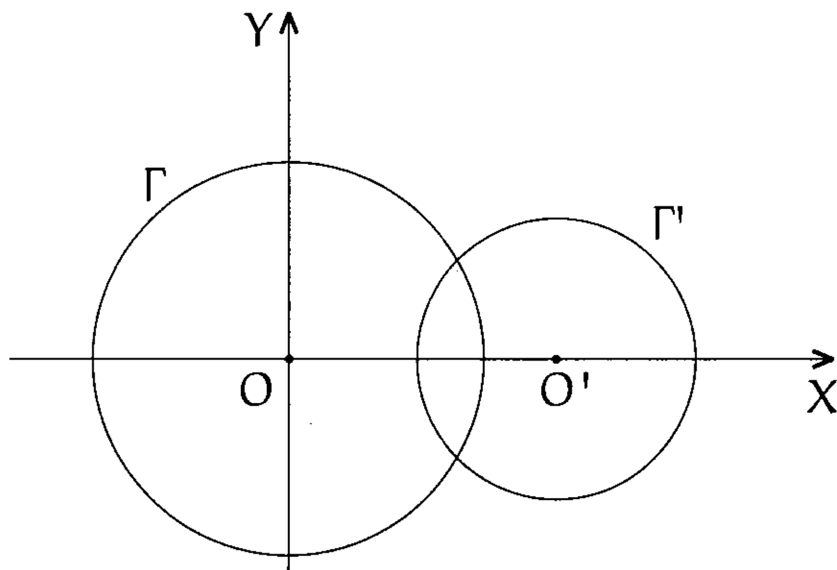



**Figura 35**

Sejam $r$ o raio de $\Gamma$ e $s$ o raio de $\Gamma'$. As coordenadas dos pontos $P = (x, y)$ pertencentes à interseção $\Gamma \cap \Gamma'$ satisfazem as equações

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{e} \quad (x - a)^2 + y^2 = s^2.$$

Substituindo $y^2$ por $r^2 - x^2$ na segunda equação, obtemos

$$x = (r^2 - s^2 + a^2)/2a.$$

Esta deve ser a abcissa comum dos pontos da interseção $\Gamma \cap \Gamma'$, caso os haja. Obtido este valor para $x$, calcula-se $y$ a partir da igualdade $y^2 = r^2 - y^2$. Se o valor de $x$, acima calculado, for tal que $x^2 > r^2$ então $y$ não existe e $\Gamma \cap \Gamma' = \varnothing$. Se for $x^2 = r^2$ então $\Gamma \cap \Gamma'$ se reduz ao único ponto $(x, 0)$. Finalmente, se $x^2 < r^2$ então há 2 valores possíveis para $y$ e a interseção $\Gamma \cap \Gamma'$ consiste nos pontos

$$(x, \sqrt{r^2 - x^2}) \quad \text{e} \quad (x, -\sqrt{r^2 - x^2}).$$

Conclusão: duas circunferências distintas têm zero, um ou dois pontos em comum.

A equação da circunferência de raio $r$ e centro no ponto de coordenadas $(a, b)$ se escreve, por extenso, assim:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Mostraremos agora que, dada a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas a satisfazem é uma circunferência se, e somente se, $A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$.

A parte "se" da afirmação acima vem de ser provada. Demonstremos agora a parte "somente se". Temos uma circunferência $\Gamma$, de raio $r$, e sabemos que um ponto pertence a ela se, e somente se, suas coordenadas $(x, y)$ satisfazem a equação acima.

Suponhamos inicialmente que o centro da circunferência $\Gamma$ seja o ponto $O = (0, 0)$. Então os pontos de coordenadas $(-r, 0)$ e $(r, 0)$ pertencem a $\Gamma$. Substituindo sucessivamente estes valores na equação dada, obtemos

$$Ar^2 - Dr + F = 0 \quad \text{e} \quad Ar^2 + Dr + F = 0.$$

Destas duas igualdades resulta que $D = 0$ e que $Ar^2 + F = 0$, ou seja, $A = -F/r^2$. Como a origem não pertence a $\Gamma$, o par $(0, 0)$ não satisfaz a equação dada, logo $F \neq 0$ e daí segue-se que $A \neq 0$.

De modo análogo, levando em conta que os pontos de coordenadas $(0, r)$ e $(0, -r)$ também estão sobre $\Gamma$, concluímos que $E = 0$ e $B = -F/r^2$.

Portanto $A = B \neq 0$ e $D = E = 0$. A equação dada se reduz a

$$Ax^2 + Ay^2 + Cxy + F = 0.$$

Como o centro da circunferência $\Gamma$, de raio $r$, é a origem $O = (0, 0)$, as coordenadas $(x, y)$ de todos os seus pontos cumprem a relação $x^2 + y^2 = r^2$, logo a equação acima pode ser escrita assim:

$$Ar^2 + Cxy + F = 0.$$

Se fosse $C \neq 0$, daí tiraríamos que $xy = -(F + Ar^2)/C$ e o produto $xy$ das coordenadas de um ponto qualquer $(x, y)$ em $\Gamma$ seria constante, o que não é verdade. Logo $C = 0$.

Resumindo: se $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ é a equação de uma circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas então $A = B \neq 0$ e $C = 0$. (Tem-se ainda, neste caso, $D = E = 0$, mas isto não vale quando o centro não é a origem.)

Passemos ao caso geral. Se o centro da circunferência $\Gamma$ é um ponto arbitrário $P = (a, b)$, consideramos a nova circunferência $\Gamma'$, de mesmo raio $r$, com centro na origem.

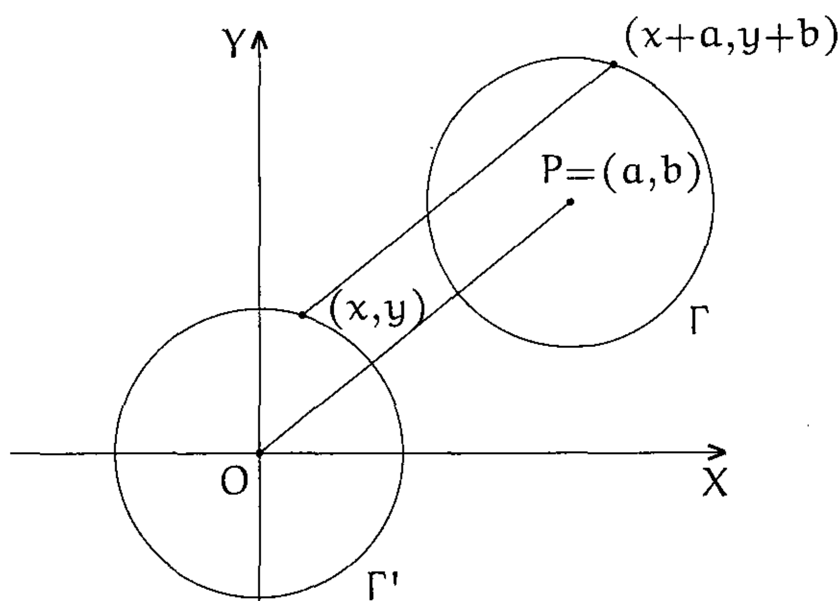



**Figura 36**

O ponto de coordenadas $(x, y)$ pertence a $\Gamma'$ se, e somente se, o ponto de coordenadas $(x + a, , y + b)$ pertence a $\Gamma$, isto é, se, e somente se,

$$A(x + a)^2 + B(y + b)^2 + C(x + a)(y + b) + D(x + a) + E(y + b) + F = 0$$

ou

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + D'x + E'y + F' = 0.$$

Esta última equação representa, portanto, a circunferência $\Gamma'$. Note que os coeficientes $A$, $B$ e $C$ são os mesmos da equação de $\Gamma$. (Os demais coeficientes $D'$, $E'$, $F'$ não nos interessam.) Como $\Gamma'$ tem centro na origem, o que vimos acima nos dá $A = B \neq 0$ e $C = 0$.

Assim, a equação dada se reduz a

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Completando os quadrados, esta última equação se escreve:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Daí resulta imediatamente que $D^2 + E^2 > 4AF$.

[Para uma discussão em torno da equação da circunferência, veja a RPM nº 29 (1995), páginas 13 a 19.]

Fica então claro que se $D^2 + E^2 > 4AF$, a equação

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa uma circunferência cujo centro é

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$$

e cujo raio é

$$\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}.$$

No exemplo seguinte tem-se um sistema de coordenadas fixado e não temos direito de modificá-lo. Uma circunferência $\Gamma$ tem centro $C = (m, n)$ e raio $R$. Dados dois números reais $a$ e $b$ (com $a^2 + b^2 \neq 0$), pergunta-se para quais valores de $c$ a reta de equação $ax + by = c$

i) é tangente a $\Gamma$;

ii) corta $\gamma$ em dois pontos distintos;

iii) não corta $\Gamma$.

Para examinar este problema, lembramos que as equações $ax + by = c$, onde $a$ e $b$ são fixos e $c$ é variável, representam retas paralelas. Como a reta $ax + by = c$ corta o eixo OX no ponto de abcissa $\frac{c}{a}$ então se $a > 0$ a reta move-se para a direita quando $c$ aumenta. (Se $a < 0$, o contrário ocorre.)

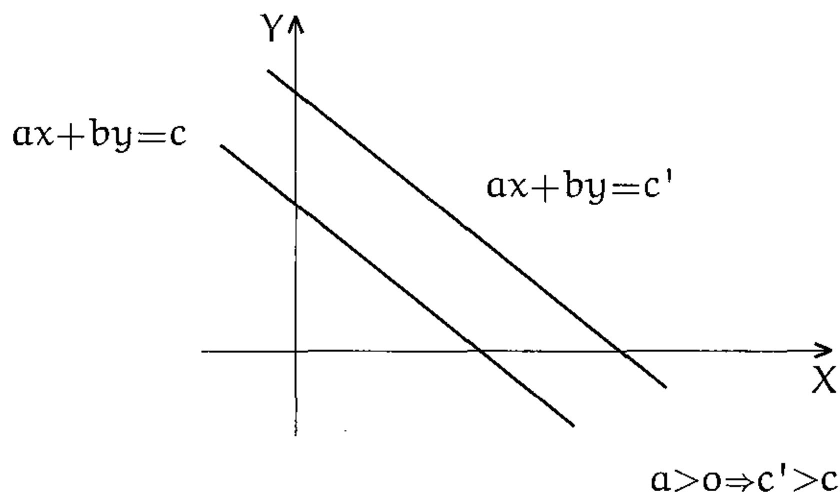



**Figura 37**

Para responder à primeira pergunta, a reta $ax + by = c$ será tangente a $\Gamma$ quando a distância do centro da circunferência até ela for igual a $R$. Teremos então

$$\frac{|am + bn - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R.$$

Esta equação fornecerá dois valores para $c$: $c_1$ e $c_2$.

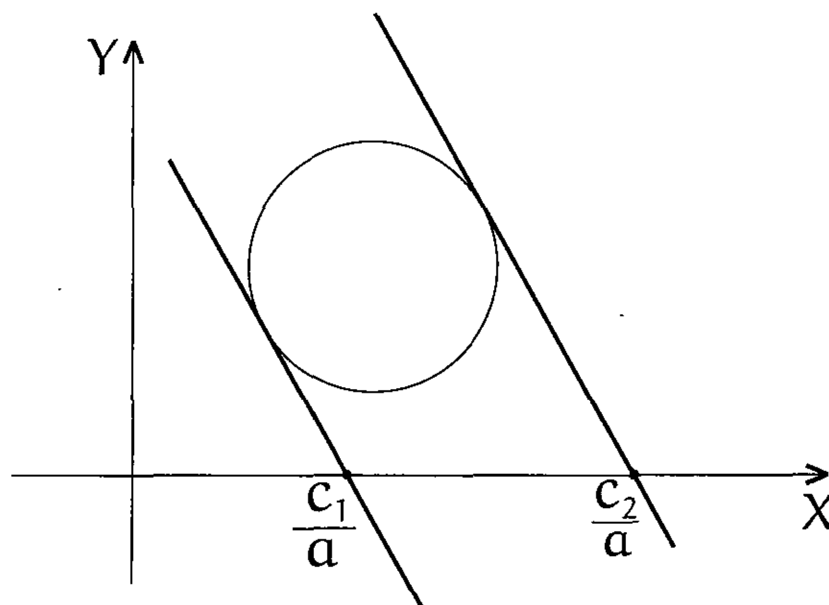
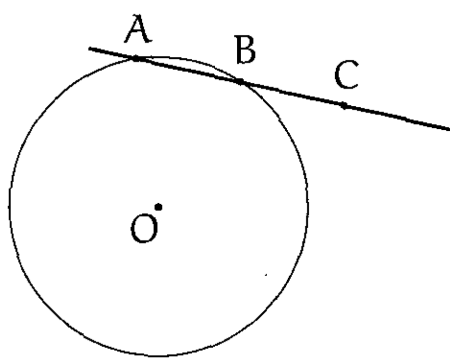



**Figura 38**

Suponhamos $a > 0$ e $c_1 < c_2$ como na figura acima. Portanto, a reta $ax+by = c$ cortará a circunferência $\Gamma$ em dois pontos distintos quando $c$ é tal que $c_1 < c < c_2$, e não cortará $\Gamma$ se $c > c_2$ ou $c < c_1$.

É interessante que alunos e professores possam abordar problemas de Geometria de diversas formas: seja da forma sintética, analítica, ou ainda na forma de uma construção com régua e compasso. Vamos mostrar a seguir um exemplo de um problema que permite múltiplas abordagens.

**Problema.** Uma circunferência tem raio $R$ e um ponto dista $\frac{3R}{2}$ de seu centro. Mostre como se pode construir uma reta que passe por $P$, corte a circunferência em $A$ e $B$, de forma que $PA = AB$.




$OA = OB = R$

$OP = \frac{3R}{2}$

**Figura 39**

Este problema foi proposto em uma Olimpíada para alunos de até 16 anos* . O enunciado deixou a critério de cada um a técnica a ser utilizada na solução. Uns conseguiram uma construção com régua e compasso da reta $PAB$ quando a circunferência e o ponto $P$ estão dados na folha de papel. Outros trabalharam com propriedades geométricas e conseguiram encontrar a medida do segmento $AP$ em função de $R$ e é claro que, com isso, a reta $PAB$ ficou bem determinada. Ainda outros alunos trabalharam com coordenadas e, no sistema escolhido, encontraram a equação da reta $PAB$.

Não cabe aqui qual é a "melhor" solução. Todas são boas e, na ocasião da Olimpíada, cada aluno considerou que a melhor era a sua.

Vamos mostrar a solução analítica e deixaremos para o leitor curioso a pesquisa das outras.

---

*Olimpíada do Cone Sul, Chile - 1993.

Os dados do problema são uma circunferência C com raio R e um ponto P que dista $\frac{3R}{2}$ do centro de C.

É conveniente escolhermos um sistema de coordenadas onde a origem é o centro de C e um dos eixos passa por P. Ainda, temos liberdade de escolher a escala com que graduaremos os eixos. Será confortável estabelecer que o raio de C vale duas unidades, porque dessa forma, a distância de P ao centro de C será de 3 unidades. O nosso problema fica então posto de acordo com a figura a seguir.

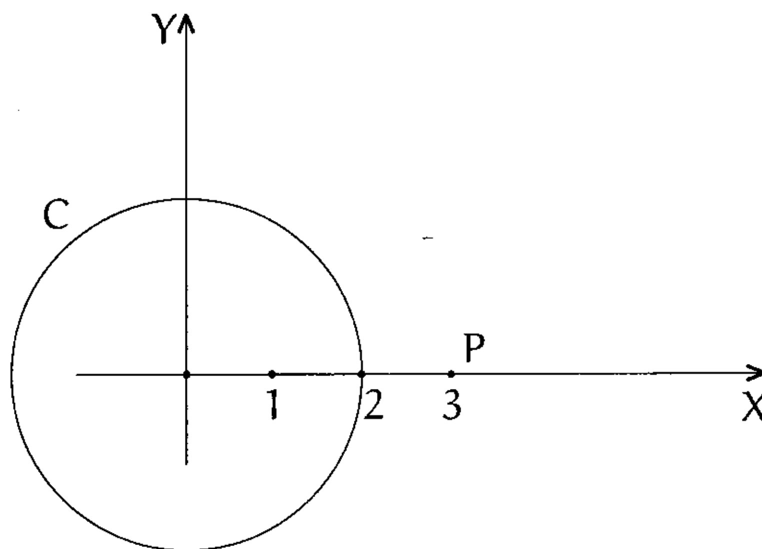



**Figura 40**

Assim, a equação de C é $x^2 + y^2 = 4$ e devemos encontrar uma reta que passa por $P = (3, 0)$ satisfazendo a condição do problema. A equação da reta que contém o ponto $(3, 0)$ e tem inclinação $m$ é $y = m(x - 3)$. As coordenadas $(x, y)$ de interseção desta reta com a circunferência cumprem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = m(x - 3). \end{cases}$$

Após uma simples substituição encontramos a equação

$$(1 + m^2)x^2 - 6m^2x + 9m^2 - 4 = 0,$$

cujas raízes são:

$$x_1 = \frac{3m^2 - \sqrt{4-5m^2}}{1+m^2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{3m^2 + \sqrt{4-5m^2}}{1+m^2}\,.$$

Os pontos comuns às duas figuras devem ser A e B com a condição que PA = AB.

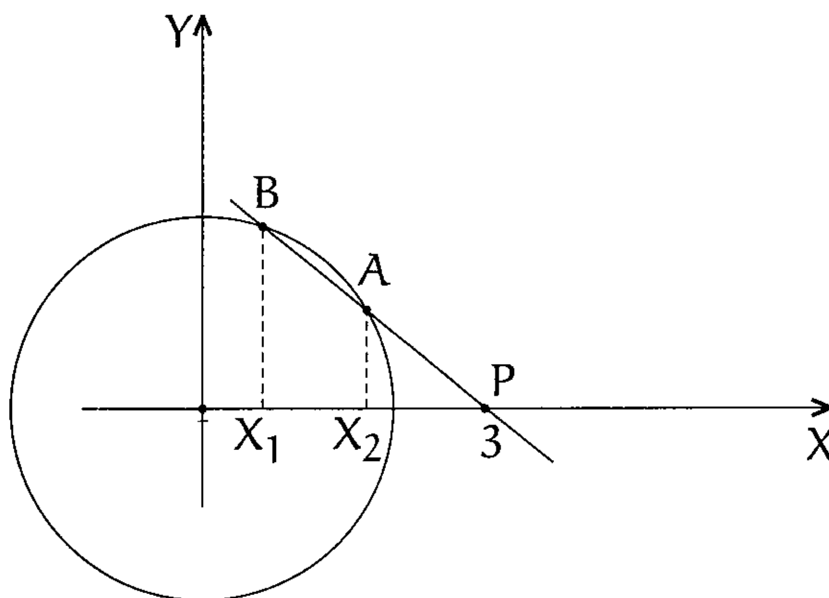



**Figura 41**

Ora, se A deve ser ponto médio do segmento PB então $x_1 + 3 = 2x_2$. Logo,

$$\frac{3m^2 - \sqrt{\Delta}}{1+m^2} + 3 = 2\frac{3m^2 + \sqrt{\Delta}}{1+m^2}$$

o que nos leva a concluir que

$$\sqrt{4-5m^2} = 1$$

e conseqüentemente

$$m = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Portanto, as retas que passam por P e cortam a circunferência em dois pontos A e B tais que A é médio do segmento PB têm equações

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}(x-3).$$

Vamos mostrar a seguir uma aplicação na vida real da equação da circunferência.

**Problema.** Um engenheiro deseja construir um galpão cuja frente mostramos no desenho abaixo.

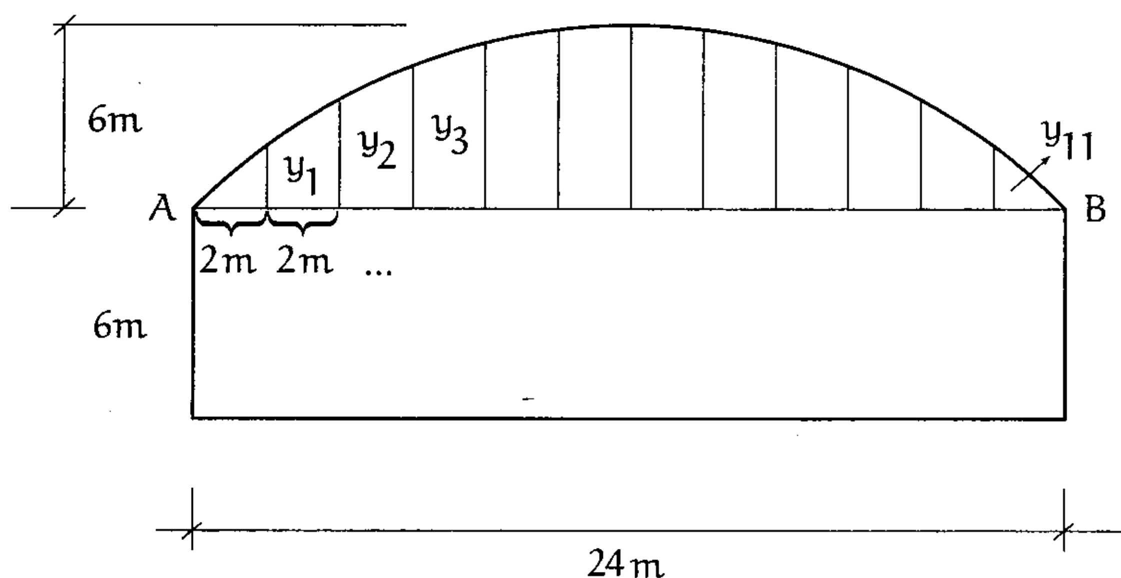



**Figura 42**

O telhado deve ser um arco de circunferência, apoiado na viga $AB$ por pequenas colunas de alturas $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{11}$, com espaçamento de 2m entre elas.

Perguntamos que alturas devem ter as colunas para que o telhado apoiado nelas seja realmente um arco de circunferência?

O processo "prático" de fixar uma extremidade de uma corda em um ponto e fazer a outra deslocar-se mantendo-a esticada, não funciona neste caso. Claramente, o centro da circunferência que contém o arco do telhado estará a vários metros de profundidade.

Este é mais um problema em que o uso de coordenadas é adequado. Estabelecemos os eixos como mostra a figura a seguir e, inicialmente vamos calcular o raio da circunferência que contém o arco do telhado.

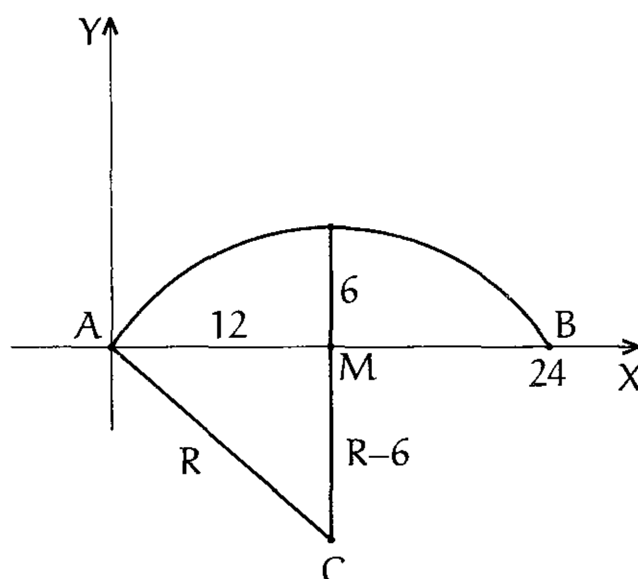



**Figura 43**

Do Teorema de Pitágoras no triângulo AMC,

$$R^2 = 12^2 + (R-6)^2$$

encontramos $R = 15$. Portanto, o centro da circunferência que contém o arco do telhado é o ponto $C = (12, -9)$. A equação dessa circunferência é:

$$(x-12)^2 + (y+9)^2 = 15^2.$$

Para calcular as alturas das colunas, basta substituir $x$ por 2, 4, 6, ..., 22 na equação acima, e calcular os valores correspondentes de $y$. Os resultados estão na tabela seguinte:

| | |
|---|---|
| $x = 2$ | $y_1 = 2,18\text{m}$ |
| $x = 4$ | $y_2 = 3,64\text{m}$ |
| $x = 6$ | $y_3 = 4,75\text{m}$ |
| $x = 8$ | $y_4 = 5,46\text{m}$ |
| $x = 10$ | $y_5 = 5,87\text{m}$ |
| $x = 12$ | $y_6 = 6,00\text{m}$ |

Os seguintes, repetem os mesmos valores na ordem contrária, de acordo com a simetria da figura.

Vamos ver ainda um outro exemplo.

**Problema.** Um triângulo equilátero ABC tem lado 2, e Γ é a sua circunferência inscrita. Demonstre que para todo ponto de Γ, a soma dos quadrados de suas distâncias aos vértices A, B e C é igual a 5.

Este problema é uma parte de um problema proposto na VII Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Quase todos os alunos participantes dessa Olimpíada atacaram o problema sinteticamente. Entretanto, os poucos que pensaram em usar coordenadas o resolveram com a maior facilidade. Vejamos.

O triângulo de vértices $A = (0, \sqrt{3})$, $B = (-1, 0)$ e $C = (1, 0)$ é equilátero e tem lado 2. O centro da circunferência inscrita é o ponto $I = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

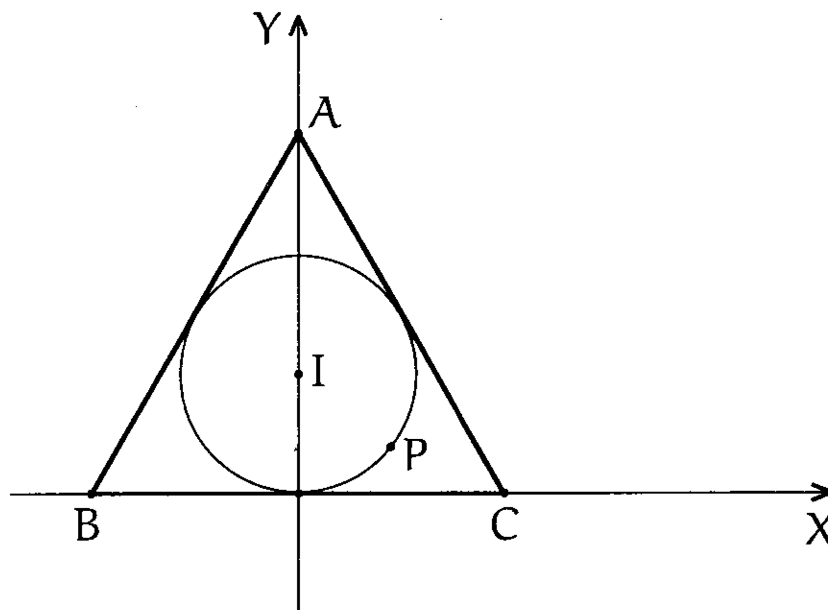



**Figura 44**

Para todo ponto $P = (x, y)$ da circunferência Γ, teremos

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

ou seja,

$$3x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}y = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= x^2 + (y - \sqrt{3})^2 + (x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}y + 5 = 5. \end{aligned}$$

Utilizar coordenadas em problemas de Geometria, nem sempre é a melhor solução. Nos problemas que mostramos, o uso de coordenadas conduziram a soluções simples e elegantes. Entretanto devemos enfatizar que o uso de coordenadas é um recurso que professores e alunos devem considerar para a resolução de problemas, mas que podem conduzir a grandes complicações algébricas* .

Um exemplo de um problema em que o uso de coordenadas não é adequado, é o seguinte.

**Problema.** O triângulo equilátero $ABC$ está inscrito em uma circunferência. Prove que se $P$ pertence ao menor arco $\overset{\frown}{BC}$ então $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

## 11. Vetores no plano

Vetores servem principalmente para deslocar pontos ou, mais precisamente, efetuar translações. E, deslocando cada um dos pontos de uma figura, eles efetuam uma translação dessa figura.

Para estudar os vetores do plano, retomamos o conceito de equipolência, já visto na seção 3.

Lembremos que um segmento de reta diz-se *orientado* quando se estipulou qual de suas extremidades é a inicial (ou a primeira); a outra será a extremidade final (ou a segunda). Quando se disser "o segmento de reta orientado $AB$", fica subentendido que $A$ é o ponto inicial e $B$ o final.

*Um brilhante matemático brasileiro, C.G.T.A.M., nos tempos em que participava das Olimpíadas de Matemática, nunca resolveu um problema de Geometria de forma sintética. Sempre conseguiu soluções analíticas que muitas vezes exigiram esforços consideráveis de cálculo.

Dois segmentos de reta no mesmo plano dizem-se *equipolentes* quando:

1) Têm o mesmo comprimento;
2) São paralelos ou colineares;
3) Têm o mesmo sentido.

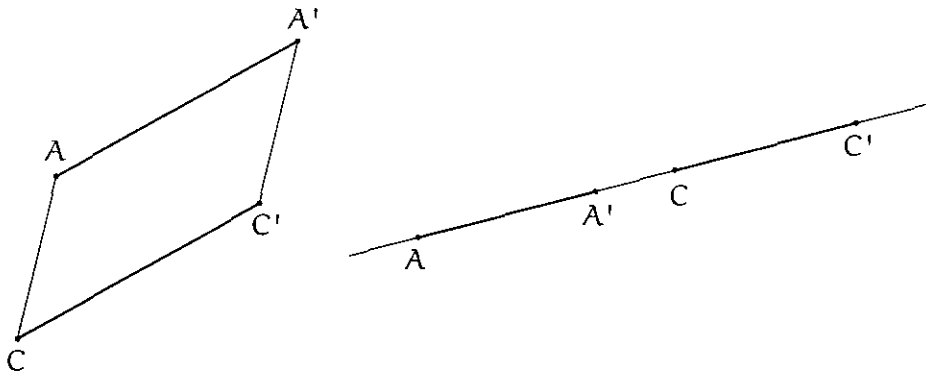



**Figura 45**

As condições 1) e 2) são claras. Quanto à terceira, se os segmentos orientados $AA'$ e $CC'$ são paralelos e têm o mesmo comprimento, diz-se que eles têm o *mesmo sentido* quando $AA'$ e $CC'$ são lados opostos de um paralelogramo do qual os outros lados opostos são $AC$ e $A'C'$. (Observe que, se isto ocorre, então $CA'$ e $AC'$ não são lados opostos e sim diagonais daquele paralelogramo, logo $A'A$ não é equipolente a $CC'$.)

Se $AA'$ e $CC'$ são segmentos orientados colineares, dizer que eles têm o mesmo sentido (de percurso) significa afirmar que uma das semi- retas $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{CC'}$ está contida na outra.

A fim de que os segmentos orientados $AA'$ e $CC'$ sejam equipolentes é necessário e suficiente que o ponto médio do segmento $AC'$ coincida

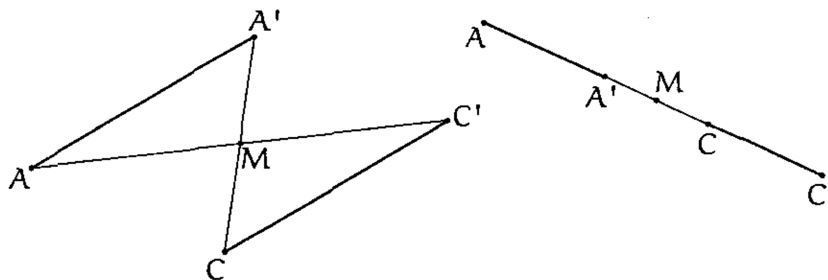



**Figura 46**

com o ponto médio de $A'C$. Daí resulta (como vimos na seção 3) que, fixado um sistema de coordenadas no plano, se $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$, os segmentos orientados $AA'$ e $CC'$ sejam equipolentes é necessário e suficiente que $a' - a = c' - c$ e $b' - b = d' - d$. (Cfr. seção 3.)

Dado o segmento orientado $AA'$, para cada ponto $P$ do plano existe um único ponto $P'$ tal que o segmento orientado $PP'$ é equipolente a $AA'$. Se $P$ não pertence à reta $AA'$ então $P'$ é simplesmente o quarto vértice do paralelogramo do qual $AA'$ e $AP$ são lados consecutivos. Se $P$ é colinear com $A$ e $A'$ então $P'$ deve ser tomado sobre a reta $AA'$ de modo que $d(P, P') = d(A, A')$ e os sentidos de percurso de $A$ para $A'$ e de $P$ para $P'$ coincidam. Se $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$ e $P = (x, y)$ então $P' = (x + \alpha, y + \beta)$, onde $\alpha = a' - a$ e $\beta = b' - b$.

Quando os segmentos orientados $AA'$ e $CC'$ são equipolentes, diz-se que eles representam o mesmo *vetor* $v$. Escreve-se então $v = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$.

Como vimos acima, dados o vetor $v = \overrightarrow{AA'}$ e o ponto $P$, existe uma único ponto $P'$ tal que $\overrightarrow{PP'} = v$. Escreve-se $P' = P + v$ e diz-se que o vetor $v$ transportou o ponto $P$ até a posição $P'$. Aliás, a palavra vetor porvém do latim *vehere*, que significa transportar.

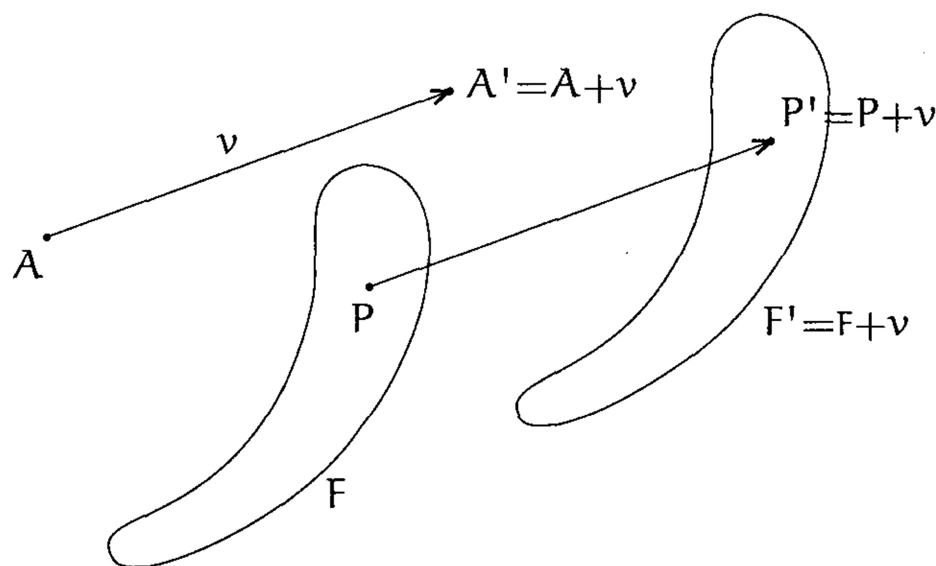



**Figura 47**

Costuma-se representar o vetor $v = \overrightarrow{AA'}$ por uma flecha com origem no ponto $A$, apontando para o ponto $A'$. A observação anterior significa que o início dessa flecha pode ser colocada em qualquer ponto $P$ do plano, obtendo-se flechas diferentes graficamente porém representando o mesmo vetor.

Fixando-se arbitrariamente um vetor $v$ no plano $\Pi$, tem-se uma transformação (= função) $T_v \colon \Pi \to \Pi$, chamada a *translação* determinada por $v$. A cada ponto $P \in \Pi$, a translação faz corresponder o ponto $T_v(P) = P'$ tal que $\overrightarrow{PP'} = v$, ou seja, $P' = P + v$.

Se $F \subset \Pi$ é qualquer figura (= subconjunto do plano $\Pi$), o conjunto

$$F + v = \{P + v; P \in F\} = T_v(F).$$

chama-se o *transladado* do conjunto $F$ pelo vetor $v$.

Seja $v = \overrightarrow{AA'}$. Se $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$ então os números $\alpha = a' - a$ e $\beta = b' - b$ chamam-se as *coordenadas do vetor* $v$ no sistema de coordenadas considerado. Escreve-se então $v = (\alpha, \beta)$. Esta definição se justifica observando que se $v = \overrightarrow{CC'}$ (portanto os segmentos orientados $AA'$ e $CC'$ são equipolentes) então, para $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$ tem-se ainda $c' - c = \alpha$ e $d' - d = \beta$. Dizer que $v = (\alpha, \beta)$ equivale a afirmar que, quando se escreve $v = \overrightarrow{OA}$, isto é, quando se representa $v$ por um segmento orientado com início em $O = (0, 0)$, então $A = (\alpha, \beta)$.

Quando se fixa um sistema em relação ao qual o vetor $v$ tem coordenadas $(\alpha, \beta)$, a translação $T_v \colon \Pi \to \Pi$ leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto

$$T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta).$$

Daí resulta imediatamente que a translação $T_v \colon \Pi \to \Pi$ preserva distâncias, isto é, se $P' = T_v(P)$ e $Q' = T_v(Q)$ então $d(P', Q') = d(P, Q)$. Esta igualdade se torna óbvia se notarmos que $P = (x, y)$ e $Q = (s, t)$ implicam

$$P' = (x + \alpha, y + \beta), \quad Q' = (s + \alpha, t + \beta),$$

logo

$$
\begin{aligned}
d(P', Q') &= \sqrt{(x + \alpha - s - \alpha)^2 + (y + \beta - t - \beta)^2} \\
&= \sqrt{(x - s)^2 + (y - t)^2} = d(P, Q).
\end{aligned}
$$

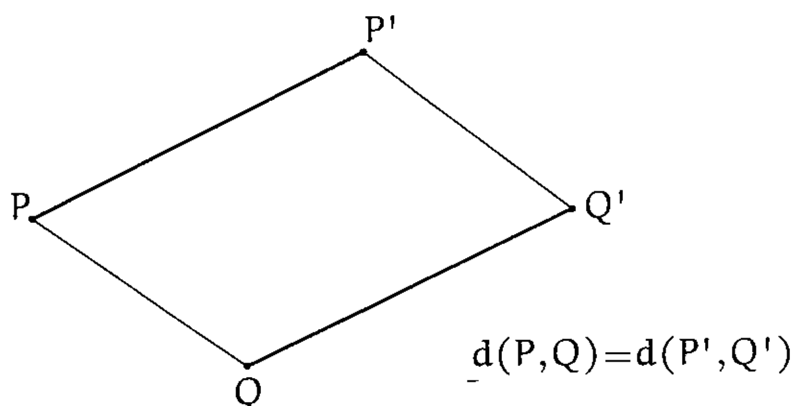



**Figura 48**

Preservando distâncias, a translação $T_v$ também preserva áreas. Este fato, na verdade, já foi usado na seção 9 quando, a fim de calcular a área de um triângulo, o deslocamos por uma translação, de modo a fazer com que um dos seus vértices coincidisse com a origem.

Uma coisa agradável com respeito a vetores é que se podem efetuar operações entre eles. As propriedades dessas operações tornam-se particularmente simples se convencionarmos em admitir o *vetor nulo* $\overrightarrow{AA}$, determinado por um segmento degenerado, no qual o início e a extremidade final se reduzem a um mesmo ponto.

Mais precisamente, admitiremos que dois pontos quaisquer do plano são equipolentes; assim o vetor nulo $\overrightarrow{AA}$ pode ter, como os demais vetores, sua origem localizada em qualquer ponto do plano. Usaremos o mesmo símbolo 0 para representar tanto o vetor nulo quanto o número zero. Em qualquer sistema, as coordenadas do vetor nulo são $(0, 0)$.

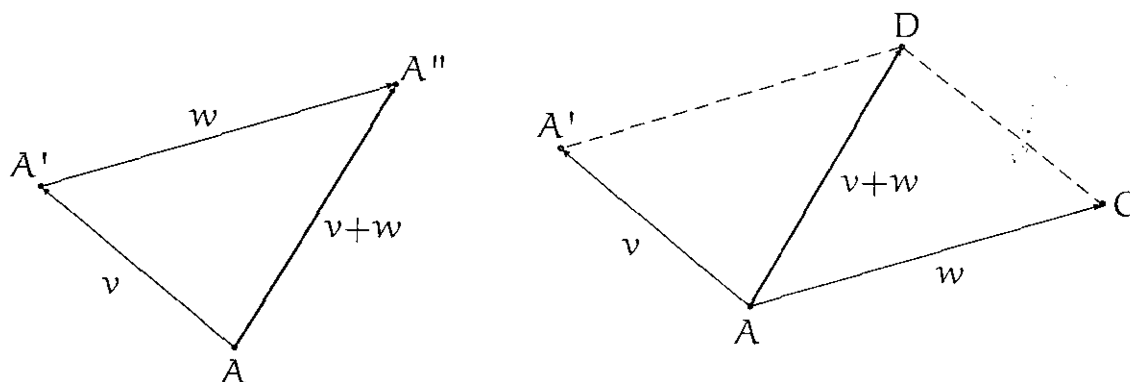



**Figura 49**

A *soma* de dois vetores $v$ e $w$ pode ser definida de duas maneiras equivalentes. A primeira consiste em representar $v = \overrightarrow{AA'}$ e, em seguida, representar $w = \overrightarrow{A'A''}$, por um segmento orientado cujo inicio seja a extremidade final $A'$ do primeiro segmento e pôr $v + w = \overrightarrow{AA''}$, por definição. A outra maneira consiste em representar os vetores $v = \overrightarrow{AA'}$ e $w = \overrightarrow{AC}$ por segmentos orientados com o mesmo início e definir $v + w = \overrightarrow{AD}$, onde $AD$ é a diagonal do paralelogramo que tem dois lados consecutivos iguais a $AA'$ e $AC$. A primeira definição funciona mesmo que os segmentos $AA'$ e $A'A''$ sejam colineares. A segunda só faz sentido (isto é, só se tem um paralelogramo) quando $AA'$ e $AC$ formam um ângulo não-nulo.

Fixado um sistema de coordenadas no plano, sejam $v = (\alpha, \beta)$ e $w = (\gamma, \delta)$. Se $A = (a, b)$ e $\overrightarrow{AA'} = v$ então $A' = (a + \alpha, b + \beta)$. Analogamente, se $\overrightarrow{A'A''} = w$ então $A'' = (a + \alpha + \gamma, b + \beta + \delta)$. Por definição, tem-se $v + w = \overrightarrow{AA''}$. Logo as coordenadas de $v + w$ são $a + \alpha + \gamma - a = \alpha + \gamma$ e $b + \beta + \delta - b = \beta + \delta$.

Portanto se $v = (\alpha, \beta)$ e $w = (\gamma, \delta)$ então $v + w = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$.

Dado o vetor $v = \overrightarrow{AA'}$, seu *simétrico*, ou *oposto*, é o vetor $-v = \overrightarrow{A'A}$. Se, num determinado sistema de coordenadas, tem-se $v = (\alpha, \beta)$ então $-v = (-\alpha, -\beta)$. Vale $-v + v = v + (-v) = 0$, por isso $-v$ também se chama o *inverso aditivo* do vetor $v$.

Sabendo que cada coordenada do vetor $v + w$ é a soma das

coordenadas correspondentes de $v$ e $w$, é fácil deduzir as propriedades formais da adição de vetores a partir de suas análogas para a adição de números reais.

Tem-se assim, para quaisquer vetores $u$, $v$ e $w$:

*comutatividade*: $v + w = w + v$;

*associatividade*: $(u + v) + w = u + (v + w)$;

*elemento neutro*: $v + 0 = 0 + v = v$;

*inverso aditivo*: $-v + v = v + (-v) = 0$.

Outra operação é a multiplicação de um vetor $v$ por um número real $t$, dando como resultado o vetor $tv$.

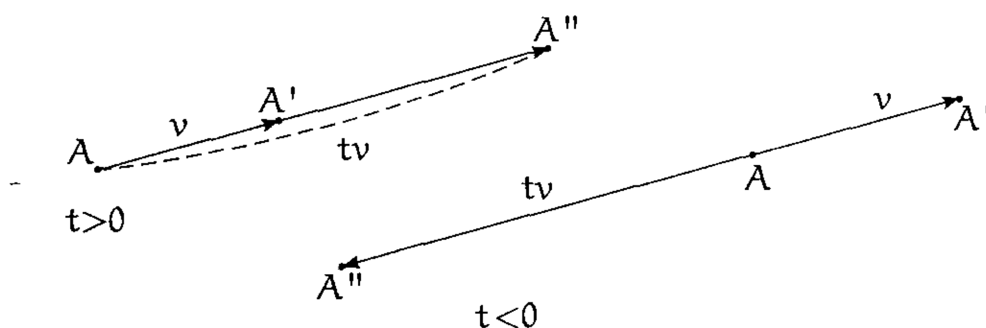



**Figura 50**

O produto $tv$ se define assim: se $t = 0$ ou $v = 0$, põe-se $tv = 0$. Se $t > 0$ e $v = \overrightarrow{AA'}$ é $\neq 0$, põe-se $tv = \overrightarrow{AA''}$, onde $A''$ é o ponto da reta $AA'$ tal que os segmentos orientados $AA'$ e $AA''$ têm o mesmo sentido e $d(A, A'') = t \cdot d(A, A')$. E, para $t = -|t|$ negativo, põe-se $tv = -(|t|v)$.

Se, num determinado sistema de coordenadas, tivermos $v = (\alpha, \beta)$, afirmamos que, para todo $t \in \mathbb{R}$, vale $tv = (t\alpha, t\beta)$.

Com efeito, representando $v$ por um segmento orientado com início em $O = (0,0)$, temos $v = \overrightarrow{OA}$, onde $A = (\alpha, \beta)$. Como sabemos, os pontos da reta $OA$ têm coordenadas $(t\alpha, t\beta)$, onde $t$ varia em $\mathbb{R}$. A fórmula da distância entre dois pontos mostra que, para $A' = (t\alpha, t\beta)$, tem-se $d(O, A) = |t| \cdot d(O, A)$. Logo $tv = \overrightarrow{OA'} = (t\alpha, t\beta)$ se $t > 0$. E, se $t < 0$, temos $tv = -(|t|v) = -(|t|\alpha, |t|\beta) = (-|t|\alpha, -|t|\beta) = (t\alpha, t\beta)$, completando a demonstração.

Da expressão $tv = (t\alpha, t\beta)$ quando $v = (\alpha, \beta)$ resultam ime-

diatamente as seguintes propriedades formais:

*associatividade*: $s(tv) = (st)v$;

*distributividade*: $(s+t)v = sv + tv$, $t(v+w) = tv + tw$;

válidas para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e quaisquer vetores $v$, $w$.

Uma terceira operação entre vetores do plano é o produto interno. Antes de introduzi -lo, observemos que se $v$ e $w$ são vetores não-nulos, o ângulo entre $v$ e $w$ é, por definição, o ângulo $B\widehat{A}C$, onde $v = \overrightarrow{AB}$ e $w = \overrightarrow{AC}$ são representações dos vetores dados mediante segmentos orientados com o mesmo início $A$. E claro que diferentes escolhas do ponto inicial $A$ produzem ângulos congruentes.

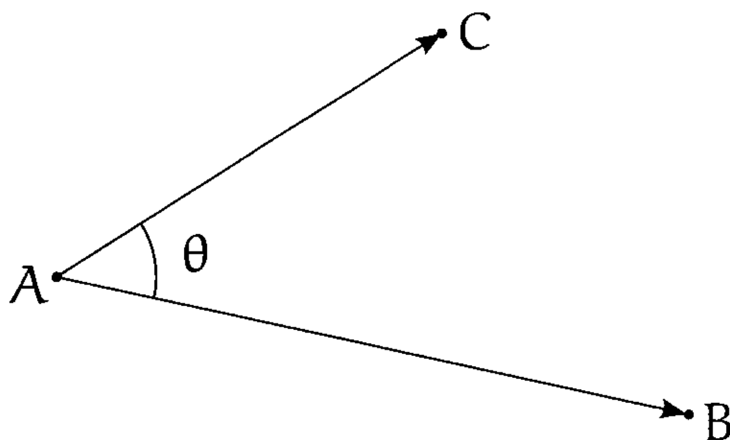



**Figura 51**

Usaremos a notação $|v|$ para indicar o comprimento do vetor $v$. Se $v = \overrightarrow{AA'}$ então $|v| = d(A, A')$ = comprimento do segmento de reta $AA'$. Num determinado sistema de coordenadas, se $v = (\alpha, \beta)$ então

$$|v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Se $|v| = 1$, o vetor $v$ chama-se *unitário*.

O *produto interno* dos vetores não-nulos $v$, $w$ é, por definição, o número

$$\langle v, w\rangle = |v|\,|w| \cos\theta,$$

onde $\theta$ é o ângulo entre $v$ e $w$. Se $v = 0$ ou $w = 0$, então não faz sentido falar no ângulo entre $v$ e $w$. Neste caso, põe-se $\langle v, w\rangle = 0$, por definição.

Vê-se que $\langle v, w\rangle > 0$ quando o ângulo entre $v$ e $w$ é agudo, $\langle v, w\rangle = 0$ quando $v$ e $w$ são ortogonais (perpendiculares) e $\langle v, w\rangle < 0$ quando o ângulo entre $v$ e $w$ é obtuso.

Tem-se ainda $\langle v, v\rangle = |v|^2 =$ quadrado do comprimento do vetor $v$. Logo o comprimento de $v$ é $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Sejam $v$ e $w$ vetores não-nulos.

Se fixarmos um sistema de ocordenadas de origem O e pusermos $v = \overrightarrow{OA}$, com $w = \overrightarrow{OC}$, com $A = (\alpha, \beta)$ e $C = (\gamma, \delta)$, sabemos que o cosseno do ângulo $\theta$ entre os segmentos OA e OB é dado por

$$\cos\theta = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{|v|\,|w|}.$$

Daí resulta que $\alpha\gamma + \beta\delta = |v|\,|w|\cos\theta$, ou seja, que

$$\langle v, w\rangle = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

Esta fórmula vale obviamente quando um dos vetores $v$ ou $w$ é igual a zero. Assim, em qualquer caso, obtemos uma expressão do produto interno $\langle v, w\rangle$ em função das coordenadas dos vetores $v$ e $w$. Observe-se que, variando o sistema, as coordenadas de $v$ e $w$ mudam mas a expressão $\alpha\gamma + \beta\delta$ se mantém invariante, pois é igual a $|v|\,|w|\cos\theta$ e este valor nada tem a ver com coordenadas.

Sabendo que $\langle v, w\rangle = \alpha\gamma + \beta\delta$ quando $v = (\alpha, \beta)$ e $w = (\gamma, \delta)$, prova-se sem dificuldade cada uma das igualdades abaixo, válidas para vetores arbitrários $u$, $v$, $w$ e qualquer número real $\alpha$:

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle;$$
$$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle;$$
$$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle;$$
$$\langle \alpha v, w\rangle = \langle v, \alpha w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle.$$

O uso de vetores permite apresentar a equação paramétrica da reta sem recorrer a um sistema de coordenadas. Com efeito, a reta que passa pelos pontos A e B é o conjunto dos pontos

$$P = A + tv, \quad t \in \mathbb{R}, \quad v = \overrightarrow{AB}.$$

Como sabemos, $P = A + tv$ significa que $tv = \overrightarrow{AP}$, ou seja, que $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$.

É interessante notar a relação entre os vetores $u = (a, b)$ e $v = (-b, a)$. Como $\langle u, v \rangle = 0$ então eles são perpendiculares. Além disso,

$$|u| = |v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e portanto eles possuem mesmo comprimento.

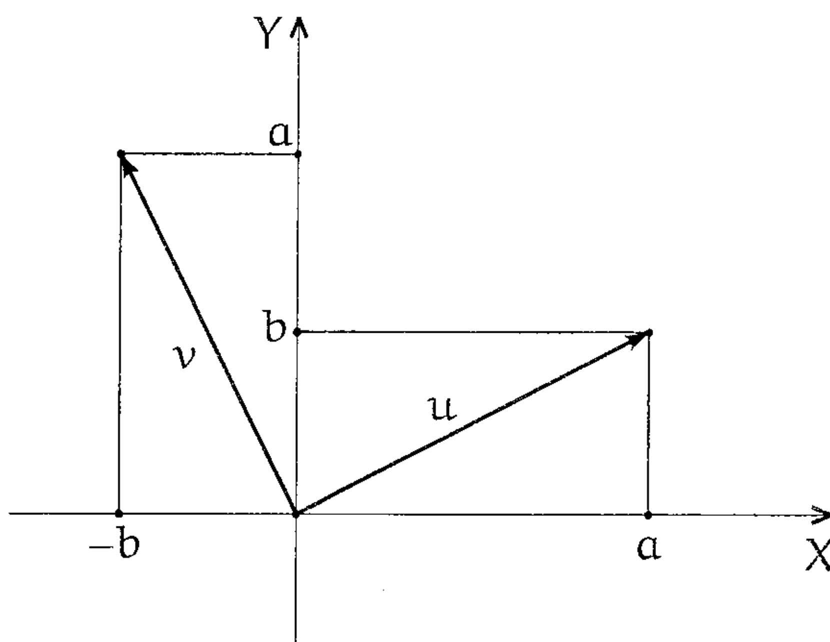



**Figura 52**

Resulta diretamente da figura, ou como caso particular da fórmula estabelecida no Vol. 1, pag. 227, que $v$ é o resultado da rotação de $u$, de um ângulo de $90°$ (no sentido positivo, isto é, no mesmo sentido de OX para OY).

Analogamente, o vetor $v' = (a, -b)$ é o resultado da rotação de $u$, de um ângulo de $-90°$.

Vamos agora mostrar dois exemplos utilizando vetores.

**Problema.** Considere um quadrado ABCD (com a seqüência dos vértices no sentido positivo). Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, pede-se determinar os vértices C e D.

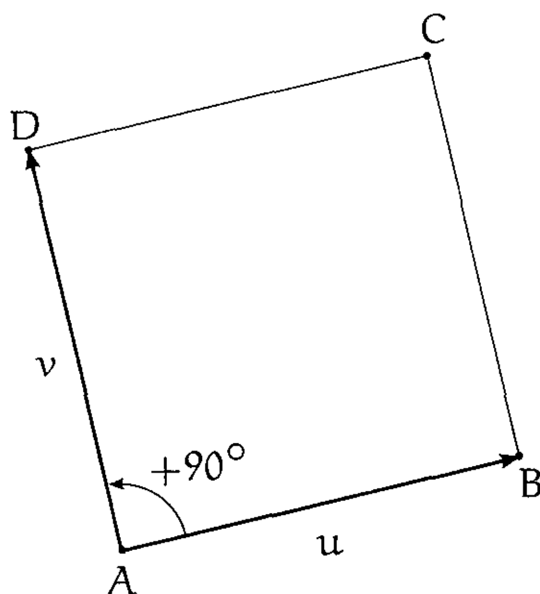



**Figura 53**

Para resolver, seja $u = \overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. O vetor $v = \overrightarrow{AD}$ é o resultado da rotação de $u$ no sentido positivo. Então,

$$v = (a_2 - b_2, b_1 - a_1).$$

Logo, $D = A + v = (a_1, a_2) + (a_2 - b_2, b_1 - a_1) = (a_1 + a_2 - b_2, a_2 + b_1 - a_1)$. Por outro lado, $\overrightarrow{CB} = v$, ou seja,

$$C = B + v = (b_1, b_2) + (a_2 - b_2, b_1 - a_1) = (b_1 + a_2 - b_2, b_2 + b_1 - a_1).$$

## O problema do Tesouro

Recentemente foi descoberto um manuscrito do pirata Barba Negra descrevendo a localização de um rico tesouro enterrado por ele em certa ilha do Caribe. O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções.

"... qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente dois grandes carvalhos, que chamarei A e B e também uma palmeira, que chamarei C. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado da seguinte forma.

Caminhe de C para A contando seus passos. Chegando em A, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos

para chegar ao ponto M.

Volte ao ponto C.

Caminhe de C para B contando seus passos. Chegando em B, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto N.

O ponto X está na reta que liga M a N, e a mesma distância desses dois pontos".

**Mapa do tesouro**

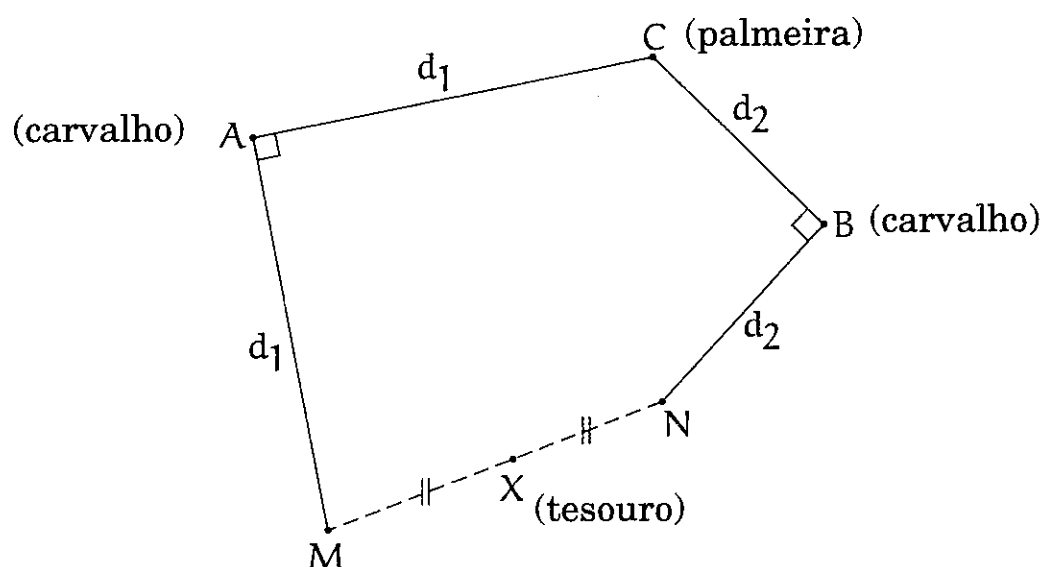



**Figura 54**

Com essas precisas informações, os exploradores chegaram à referida ilha mas tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos (A e B) lá estavam, mas a palmeira (C) tinha desaparecido completamente.

O tesouro estava perdido.

Entretanto, fazia parte da comitiva, o matemático Augusto Wagner Carvalho que, após breves cálculos, conseguiu descobrir o tesouro e, naturalmente, reivindicou para si a sua posse.

Como ele fez isso?

Vamos mostrar um exemplo de um problema em que o uso de coordenadas foi extremamente útil.

## A solução do problema do Tesouro

Augusto Wagner Carvalho estabeleceu na ilha, que felizmente era plana, um sistema de coordenadas com origem em A e com o ponto B no eixo dos X. Ele mediu a distância de A até B e encontrou 40 metros. Assim, ficou estabelecido que $A = (0,0)$, $B = (40,0)$ e para a palmeira desaparecida ele pôs $C = (x,y)$.

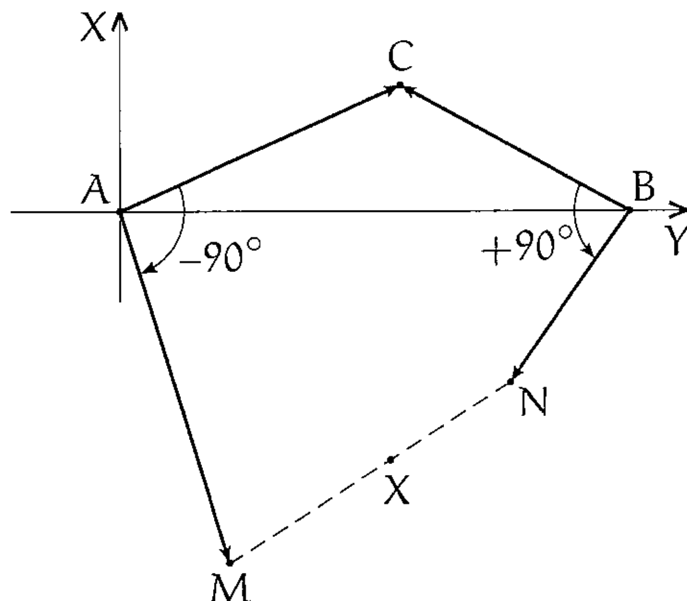



**Figura 55**

Temos então que:

$$\overrightarrow{AC} = (x,y), \quad \overrightarrow{AM} = (y,-x), \quad \overrightarrow{BC} = (x-40,y)$$

e

$$\overrightarrow{BN} = (-y, x-40).$$

Como A é a origem, as coordenadas do ponto M são $M = (y,-x)$. Logo, $N = B + \overrightarrow{BN} = (40-y, x-40)$.
Sendo X o ponto médio de MN, suas coordenadas são dadas por

$$X = \left(\frac{y+40-y}{2}, \frac{-x+x-40}{2}\right) = (10,-20).$$

Portanto, para encontrar o tesouro, bastava andar 20m na direção de A para B e depois virar à direita e andar mais 20m. Com-

petência de Augusto Wagner e azar de Barba Negra. A localização do tesouro ficou independente da palmeira.

## Exercícios

1) A reta r contém os pontos $(4,2)$ e $(7,3)$.
   a) Determine k para o ponto $(16,k)$ pertença a r.
   b) Verifique se o ponto $(1997,666)$ está acima ou abaixo de r.

2) Encontre a equação da reta que contém os pontos $(a,0)$ e $(0,b)$.

3) Sejam $A = (a,a')$ e $B = (b,b')$. Determine o ponto P, interior ao segmento AB, tal que $d(A,P) = \frac{1}{3} \cdot d(A,B)$.

4) Prove que as medianas de um triângulo concorrem em um ponto, que divide cada uma delas na razão 1/3.

5) ABCD é um paralelogramo. Se $A = (a,a')$, $B = (b,b')$ e $C = (c,c')$, determine D.

6) Prove que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se os pontos médios de suas diagonais coincidem.

7) Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual a metade deste.

8) Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados opostos não paralelos de um trapézio é igual a semi-soma das bases.

9) Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

10) Prove que a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados de suas diagonais.

11) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos $(1,3)$ e $(5,1)$.

12) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que equi-

distam do eixo OX e do ponto $(0,2)$.

13) São dados dois pontos A e B. Determine o lugar geométrico de P tal que $d(A,P)^2 + d(P,B)^2 = k^2$ onde k é uma constante dada. Se $d(A,B) = 2a$, determine para que valores de k o problema tem solução.

14) São dados dois pontos A e B. Determine o lugar geométrico de P tal que $d(A,P)^2 - d(P,B)^2 = k^2$ onde k é uma constante dada. Determine ainda para que valores de k o problema tem solução.

15) Determine a equação da bissetriz do menor ângulo formado pelas retas $y = x$ e $y = 7x$.

16) Sejam d e $d'$ as distâncias de um ponto P às retas $y = 0$ e $y = x$, respectivamente. Determine o lugar geométrico de P tal que $d - d' = 1$.

17) Um segmento AB de comprimento $\ell$ move-se de forma que A está sobre OX e B sobre OY. Determine o lugar geométrico do ponto médio de AB.

18) Sejam $O = (0,0)$ e Q um ponto que percorre a reta $x = 2$. Determine o lugar geométrico de P, sobre o segmento OQ, e de forma que $d(O,P) \cdot d(O,Q) = 4$.

19) Sejam $O = (0,0)$ e r a reta $ax + by = c$. O ponto Q percorre a reta r e o ponto P é tal que $\overrightarrow{OP} = 3 \cdot \overrightarrow{OQ}$. Determine o lugar geométrico de Q.

20) Para que valor de k as retas $2x + 5y = 7$ e $3x + ky = 1$ são

   a) paralelas?

   b) perpendiculares?

21) Calcule m para que as retas $2x + 3y = 8$, $4x + 7y = 18$ e $5x + my = 3$ passem por um mesmo ponto.

22) Sendo $A = (1,4)$ e $B = (3,0)$ determine a equação da mediatriz

do segmento $AB$.

23) Determine o ponto $P$ da reta $x + 3y = -15$ que equidista dos pontos $A = (1, 4)$ e $B = (3, 0)$.

24) Determine o simétrico do ponto $A = (3, 4)$ em relação à reta $x + 2y = 1$.

25) Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A = (3, 4)$, $B = (1, 1)$ e $C = (7, 3)$.

26) Em um quadrado $ABCD$, o ponto $M$ é médio do lado $CD$. Determine o cosseno do ângulo $A\widehat{M}B$.

27) Os pontos $(2, 3)$, $(3, 1)$ e $(9, y)$ são vértices consecutivos de um retângulo. Determine o quarto vértice.

28) Sobre os vetores $u$ e $v$ sabe-se que $|u| = 4$, $|v| = 5$ e $|u + v| = 6$. Calcule $\langle u, v \rangle$.

29) Os pontos $(5, 1)$ e $(8, 3)$ são vértices consecutivos de um quadrado contido no primeiro quadrante. Determine os outros dois vértices.

30) Os pontos $A = (a, a')$ e $C = (c, c')$ são vértices opostos de um quadrado. Determine os outros dois vértices.

31) Dados $A = (3, 7)$, $B = (1, 1)$ e $C = (9, 6)$, determine a projeção ortogonal de $A$ sobre a reta $BC$.

32) Para cada valor real de $m$, a equação $mx + (m - 1)y + (2 - m) = 0$ representa uma reta. Mostre que essas retas passam por um mesmo ponto.

33) O que significa a equação $(x + y - 3)(3x - y - 1) = 0$?

34) Para cada real $k$, $R_k$ é um objeto que tem equação $x + y - 3 + k(3x - y - 1) = 0$. Descreva o conjunto dos $R_k$.

35) O que significa no plano cartesiano a equação $x^3y - xy^3 = 0$?

36) Seja $\theta$ o menor ângulo formado pelas retas $y = ax + b$ e $y =$

$a'x + b'$. Mostre que

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{a - a'}{1 + aa'} \right|.$$

37) A figura abaixo mostra um retângulo ABCD onde $AB = BM = MN = NC$. Calcule $\operatorname{tg} \theta$.

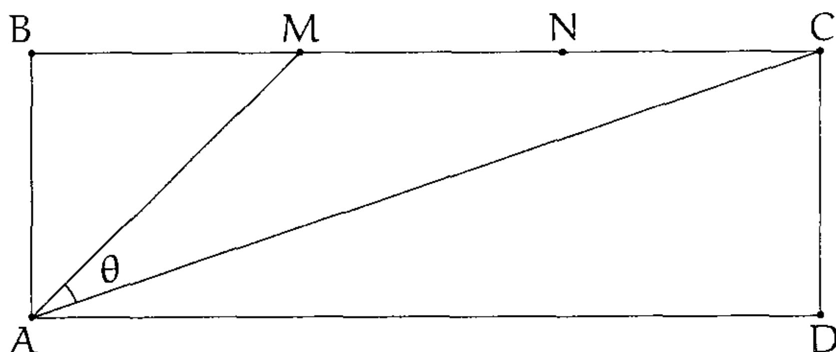



**Figura 56**

38) Encontre os pontos da reta $y = x + 1$ que distam 5 unidades da reta $8x + 6y = -5$.

39) Determine as retas que passam pelo ponto $(7, 4)$ e fazem $45°$ com a reta $x - 3y = 0$.

40) Obtenha um ponto da reta $2x - y = 0$ que forme com os pontos $(1, 0)$ e $(3, 1)$ um triângulo de área 5.

41) Determine o ortocentro da triângulo cujos vértices são $(-3, 0)$, $(0, 6)$ e $(2, 0)$.

42) Determine para que valores de $m$ a equação $x^2 + y^2 - 2\sqrt{m}\,x - 12y + 3m = 0$ representa uma circunferência.

43) Encontre a equação da circunferência que contém os pontos $(10, 7)$, $(2, -9)$ e $(-4, 9)$.

44) Determine os pontos de interseção das circunferências $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - x - 4y - 3 = 0$.

45) Sejam $O = (0, 0)$ e $\Gamma$ a circunferência de centro $(2, 1)$ e raio 1.
a) Determine as retas que passam por 0 e são tangentes a $\Gamma$.

b) Determine os pontos de tangência.

46) Determine para que valores de $k$ a reta $y = kx$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$.

47) Determine os pontos de interseção da reta $x + y = 5$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 13$.

48) Seja $P(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ onde $a^2 + b^2 - 4c > 0$. Desta forma, $P(x, y) = 0$ representa uma circunferência $\Gamma$. Mostre que:

a) Se $P(x_0, y_0) < 0$ então o ponto $(x_0, y_0)$ é interior a $\Gamma$.

b) Se $P(x_0, y_0) > 0$ então o ponto $(x_0, y_0)$ é exterior a $\Gamma$.

Obs.: $P(x_0, y_0)$ chama-se *potência* do ponto $(x_0, y_0)$ em relação a $\Gamma$.

49) Sejam $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ duas circunferências secantes e seja $r$ a reta que contém os pontos de interseção. Prove que todo ponto de $r$ tem mesma potência em relação às duas circunferências.

50) Seja $P$ um ponto exterior a uma circunferência $\Gamma$. Prove que a potência de $P$ em relação a $\Gamma$ é o quadrado do segmento de tangente traçada de $P$ até $\Gamma$.

51) Sejam $a_1$, $a_2$, $b_1$ e $b_2$ múmeros reais. Prove que

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$$

e que a igualdade ocorre se e somente se $a_1 = tb_1$ e $a_2 = tb_2$ para algum $t$ real.

52) Calcule o raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo cujos catetos medem $b$ e $c$.

53) Mostre que as bissetrizes dos 4 ângulos formados por duas retas concorrentes estão contidas em retas perpendiculares.

54) Seja $A$ a área do paralelogramo construído sobre os lados $PQ$ e $PR$. Escreva $\overrightarrow{PQ} = u = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{PR} = v = (\gamma, \delta)$. A partir da

igualdade

$$A^2 = |u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

e conclua que $A = |\alpha\delta - \beta\gamma|$. Obtenha assim uma nova dedução para a fórmula da área de um triângulo.

Capítulo 2

# Geometria Analítica Espacial

## 1. Introdução

A introdução de coordenadas no espaço oferece não apenas um método para resolver problemas geométricos com os recursos da Álgebra como, reciprocamente, fornece uma interpretação geométrica valiosa para questões de natureza algébrica.

O estudo da Geometria Analítica Espacial que faremos aqui se limita praticamente à equação do plano e temas relacionados. Ele é feito com vistas aos sistemas de equações lineares, um assunto proeminente na Matemática do Ensino Médio. Veremos como a Geometria contribui para o bom entendimento dessa matéria. Visualizaremos um sistema de três equações lineares a três incógnitas como um conjunto de três planos no espaço; uma solução do sistema é um ponto comum aos três planos. Mostraremos que há oito posições possíveis para esses planos e ensinaremos como identificar essas posições examinando os coeficientes das equações.

Para um estudo mais completo da Geometria Analítica Espacial, ver o livro "Coordenadas no Espaço", da Coleção do Professor de Matemática da S.B.M.

## 2. Coordenadas no espaço

Seja E o espaço euclidiano tridimensional, objeto de estudo da Geometria Espacial. Um *sistema de coordenadas* (cartesianas) em E consiste em três eixos OX, OY e OZ, com a mesma origem O, tais

que qualquer um deles é perpendicular a cada um dos outros dois. O sistema é indicado com notação OXYZ.

Uma vez fixado o sistema OXYZ, chamaremos de $\Pi_{xy}$, $\Pi_{yz}$ e $\Pi_{xz}$ os planos determinados pelos eixos OX e OY, OY e OZ, OX e OZ, respectivamente.

A escolha do sistema OXYZ faz com que se possa associar a cada ponto $P$ do espaço um terno ordenado $(x, y, z)$ de números reais, chamados as *coordenadas* do ponto $P$ relativamente a esse sistema.

Para obter a coordenada $x$ do ponto $P$ fazemos passar por esse ponto um plano $\Pi$, paralelo a $\Pi_{yz}$. A coordenada, no eixo OX, da interseção $\Pi \cap OX$ é o número $x$. Analogamente, $y$ é a coordenada, no eixo OY, da interseção deste eixo com o plano $\Pi'$, paralelo a $\Pi_{xz}$, passando por $P$. Finalmente, $z$ é a coordenada, no eixo OZ, da interseção $\Pi'' \cap OZ$, onde $\Pi''$ é o plano paralelo a $\Pi_{xy}$ passando por $P$.

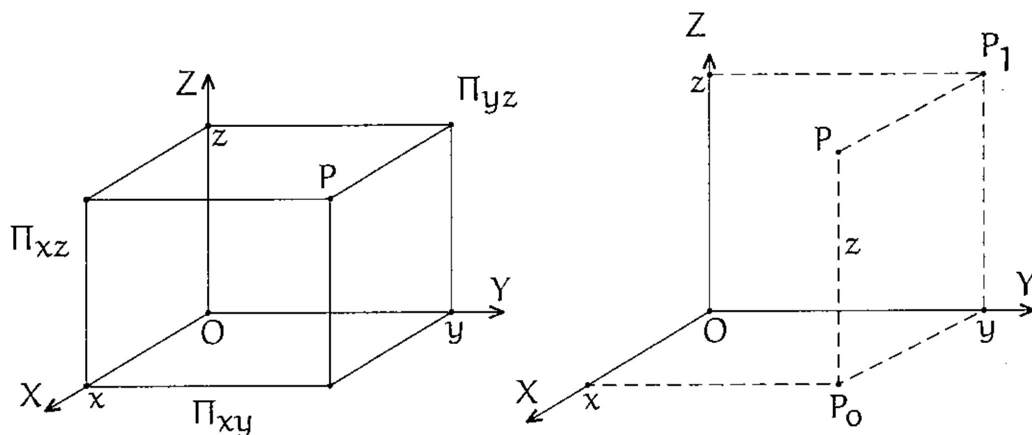



**Figura 57**

As coordenadas $(x, y, z)$ do ponto $P$ no sistema OXYZ podem também ser obtidas assim: a reta paralela ao eixo OZ passando pelo ponto $P$ corta o plano $\Pi_{xy}$ no ponto $P_0$. Sejam $(x, y)$ as coordenadas de $P_0$ no sistema OXY do plano $\Pi_{xy}$. Estas são as duas primeiras coordenadas de $P$. Por sua vez, a reta paralela ao eixo OX passando por $P$ corta o plano $\Pi_{yz}$ no ponto $P_1$. Sejam $(y, z)$ as coordenadas de $P_1$ no sistema OYZ. O número $y$ é o mesmo já obtido e $z$ é a coordenada restante do ponto $P$.

Usa-se a notação $\mathbb{R}^3$ para representar o conjunto cujos elementos são os ternos ordenados $(x, y, z)$ de números reais. O número $x$ é a primeira coordenada do terno $(x, y, z)$, $y$ é a segunda coordenada e $z$ é a terceira. Dois ternos $(x, y, z)$ e $(x', y', z')$ são iguais se, e somente se, $x = x'$, $y = y'$ e $z = z'$. Em particular, $(1, 2, 3)$ e $(1, 3, 2)$ são ternos diferentes.

O sistema OXYZ determina uma correspondência biunívoca $E \to \mathbb{R}^3$ que a cada ponto $P$ do espaço associa o terno $(x, y, z)$ de coordenadas desse ponto no sistema dado. Quando estiver claro o sistema OXYZ a que nos referimos, escreveremos $P = (x, y, z)$ para significar que $x$, $y$ e $z$ são as coordenadas do ponto $P$.

As coordenadas da origem O são $(0, 0, 0)$. Os pontos dos planos $\Pi_{xy}$, $\Pi_{yz}$ e $\Pi_{xz}$ têm coordenadas $(x, y, 0)$, $(0, y, z)$ e $(x, 0, y)$ respectivamente.

Um plano chama-se *vertical* quando contém o eixo OZ ou é paralelo a ele. Um plano diz-se *horizontal* quando é perpendicular ao eixo OZ. Todos os pontos de um plano horizontal têm coordenadas $(x, y, c)$, onde a constante $c$ é a coordenada no eixo OZ, da interseção do plano dado com esse eixo. Diz-se então que $z = c$ é a equação do referido plano. De modo análogo, os planos perpendiculares aos eixos OX e OY têm equações do tipo $x = a$, $y = b$ respectivamente.

Evidentemente, um plano horizontal é paralelo a, ou coincide com, o plano $\Pi_{xy}$.

## 3. As equações paramétricas de uma reta

Se $P = (x, y, z)$ são as coordenadas relativas ao sistema OXYZ no espaço então as coordenadas, no sistema OXY, da projeção ortogonal $P_0$ do ponto $P$ sobre o plano $\Pi_{xy}$ e da projeção $P_1$ do mesmo ponto $P$ sobre o plano $\Pi_{yz}$ são $P_0 = (x, y)$ e $P_1 = (y, z)$.

Seja $r$ a reta do espaço passando pelos pontos $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$. Sua projeção ortogonal sobre o plano $\Pi_{xy}$ é a reta $r_0$ que passa pelos pontos $A_0 = (a, b)$ e $A_0' = (a', b')$, cujas coordenadas são referentes ao sistema OXY. As equações paramétricas

da reta $r_0$ são

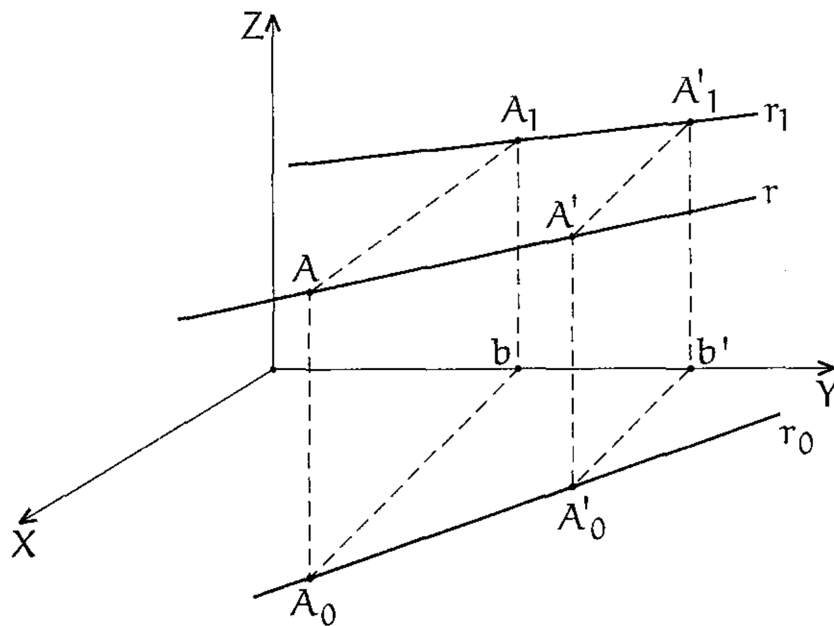



**Figura 58**

$$x = a + t(a' - a), \quad y = b + t(b' - b).$$

Analogamente, as equações paramétricas da reta $r_1$, projeção ortogonal de $r$ sobre o plano $\Pi_{yz}$, são

$$y = b + t(b' - b), \quad z = c + t(c' - c).$$

Ora, o ponto $P = (x, y, z)$ pertence a $r$ se, e somente se, $P_0 = (x, y)$ pertence a $r_0$ e $P_1 = (y, z)$ pertence a $r_1$. Logo $(x, y, z)$ pertence a $r$ se, e somente se,

$$x = a + t(a' - a),$$
$$y = b + t(b' - b) \quad \text{e}$$
$$z = c + t(c' - c),$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

Estas são, portanto, equações paramétricas da reta que contém os pontos $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$. Quando $t$ varia de 0 a 1, o ponto $P = (x, y, z)$, cujas coordenadas são dadas pelas equações

acima, descreve o segmento de reta $AA'$. Quanto $t < 0$, $A$ se situa entre $P$ e $A'$. Finalmente, quando $t > 1$, tem-se $A'$ entre $A$ e $P$.

No caso particular da reta $OA$, que passa pela origem e pelo ponto $A = (a, b, c)$, suas equações paramétricas assumem a forma mais simples $x = ta$, $y = tb$, $z = tc$, ou seja, seus pontos são $P = (ta, tb, tc)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

**Observação.** Quando se deseja caracterizar analiticamente os pontos de uma reta no espaço, tem-se duas opções: ou as equações paramétricas daquela reta ou o sistema de duas equações com três incógnitas, representando dois planos cuja interseção é a reta dada, conforme veremos na seção 6, logo adiante. Salvo em circunstâncias muito especiais, as equações paramétricas são mais convenientes, principalmente quando se quer encontrar a interseção da reta com uma superfície, pois tem-se apenas que determinar o valor do parâmetro $t$ de modo que o ponto satisfaça a equação da superfície. Por exemplo: qual a interseção da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $A' = (4, 5, 6)$ com o plano horizontal cuja equação é $z = -1$?

As equações paramétricas da reta $AA'$ são

$$x = 1 + 3t, \qquad y = 2 + 3t, \qquad z = 3 + 3t.$$

Para que um ponto desta reta esteja sobre o plano $z = -1$, deve-se ter $3 + 3t = -1$, ou seja, $t = -4/3$. Então $x = 1 + 3t = 1 + 3(-4/3) = -3$, $y = 2 + 3t = 2 + 3(-4/3) = -2$ e $z = -1$. O ponto procurado é $P = (-3, -2, -1)$.

## 4. Distância entre dois pontos no espaço

Observamos inicialmente que se, num determinado sistema $OXYZ$, os pontos $P = (a, b, z)$ e $Q = (a, b, z')$ têm as duas primeiras coordenadas iguais então $d(P, Q) = |z - z'|$ pois esta é a distância entre dois pontos no eixo formado por todos os pontos $(a, b, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Um resultado análogo vale, evidentemente, para a primeira e terceira, ou para a segunda e terceira coordenadas.

Dados $P = (x, y, z)$ e $P' = (x', y', z')$, consideremos os pontos

auxiliares $Q = (x, y, z')$ e $R = (x, y', z')$. O Teorema de Pitágoras, aplicado aos triângulos

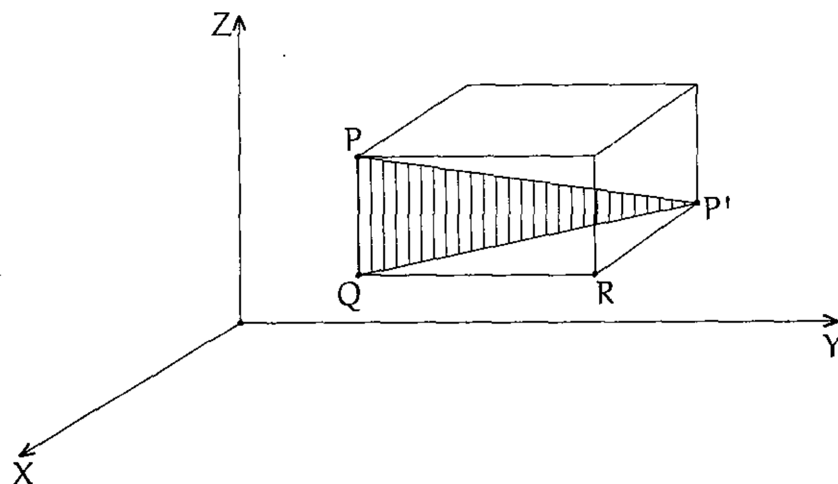



**Figura 59**

retângulos $PQP'$ e $QRP'$, nos dá, sucessivamente:

$$d(P, P')^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, P')^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, R)^2 + d(R, P')^2.$$

Como $(P, Q)$, $(Q, R)$ e $(R, P')$ são pares de pontos com duas coordenadas iguais, resulta da observação inicial que

$$d(P, P')^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2$$

logo

$$d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

**Observação.** Pode ocorrer, é claro, que um (ou cada um) dos triângulos retângulos acima se reduza a um segmento como, por exemplo, quando $Q = P$. Nestes casos, o Teorema de Pitágoras se reduz a uma igualdade banal.

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y, z)$ à origem $O = (0, 0, 0)$ é dada por

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Como no caso do plano, podemos caracterizar o perpendicularismo dos segmentos $OA$ e $OA'$ em termos das coordenadas dos pontos $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$.

Com efeito, o ângulo $A\widehat{O}A'$ é reto se, e somente se, vale

$$d(A, A')^2 = d(O, A)^2 + d(O, A')^2,$$

ou seja

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

ou seja, $a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 - 2(aa' + bb' + cc')$
$= a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2.$

Simplificando, obtemos a relação

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

que fornece a condição necessária e suficiente para que sejam perpendiculares os segmentos $OA$ e $OA'$, onde $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$.

A fórmula da distância entre dois pontos permite obter imediatamente as coordenadas do ponto que divide um segmento $AA'$ numa razão dada. Com efeito, se $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$, sabemos que os pontos do segmento de reta $AA'$ são $X_t = (x_t, y_t, z_t)$, onde $0 \leqslant t \leqslant 1$ e

$$\begin{aligned} x_t &= a + t(a' - a) \\ y_t &= b + t(b' - b) \\ z_t &= c + t(c' - c). \end{aligned}$$

Destas igualdades, resulta por um cálculo simples que

$$\frac{d(A, X_t)}{d(A, A')} = \frac{\sqrt{(x_t - a)^2 + (y_t - b)^2 + (z_t - c)^2}}{\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}} = t.$$

Portanto $X_t$ é, para todo $t \in [0, 1]$, o ponto do segmento de reta $AA'$ tal que $d(A, X_t)/d(A, A') = t$.

Em particular, tomando $t = 1/2$ obtemos as coordenadas do ponto médio de $AA'$:

$$M = X_{1/2} = \left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2}\right).$$

Conhecendo as coordenadas do ponto médio de um segmento, podemos responder a seguinte pergunta: dados $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$ e o ponto $P = (m, n, p)$ fora da reta $AA'$, quais são as coordenadas do ponto $P' = (x, y, z)$ tal que $AA'$ e $PP'$ são lados opostos de um paralelogramo?

De saída, observamos que a pergunta acima admite duas respostas possíveis. Numa delas, $AP$ e $A'P'$ também formam um par de lados opostos do paralelogramo; na outra, $AP$ e $A'P'$ são diagonais.

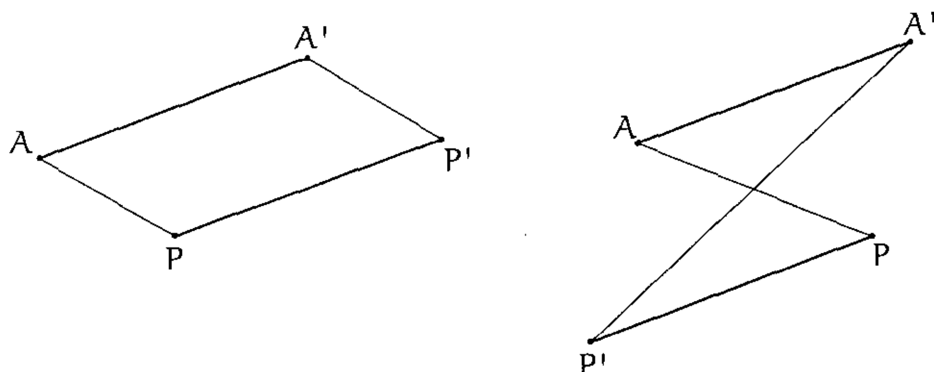



**Figura 60**

Escrevamos $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$ e $\gamma = c' - c$. Queremos determinar $P' = (x, y, z)$ de modo que tanto $AA'$ e $PP'$ como $AP$ e $A'P'$ sejam pares de lados opostos de um mesmo paralelogramo. Então $AP'$ e $A'P$ são as diagonais, logo seus pontos médios coincidem. Daí resulta que

$$\frac{a+x}{2} = \frac{a'+m}{2}, \quad \frac{b+y}{2} = \frac{b'+n}{2}, \quad \frac{c+z}{2} = \frac{c'+p}{2},$$

portanto $x = m + (a' - a)$, $y = n + (b' - b)$, $z = p + (c' - c)$, ou seja,

$$x = m + \alpha, \quad y = n + \beta, \quad z = p + \gamma.$$

Como no caso do plano, diremos que os segmentos de reta orientados $AA'$ e $PP'$ são *equipolentes* quando eles:

1) Têm o mesmo comprimento, isto é, $d(A, A') = d(P, P')$;
2) São paralelos ou colineares;
3) Têm o mesmo sentido.

Novamente aqui as condições 1) e 2) são claras. A condição 3) significa, no caso em que $AA'$ e $PP'$ são paralelos, que eles são lados opostos de um paralelogramo do qual os outros dois lados opostos são $AP$ e $A'P'$. No caso em que $AA'$ e $PP'$ estão sobre a mesma reta, dizer que estes segmentos orientados têm o mesmo sentido signfica que uma das semi-retas $\overrightarrow{AA'}$ ou $\overrightarrow{PP'}$ está contida na outra.

A fim de que os segmentos de reta orientados $AA'$ e $PP'$ sejam equipolentes é necessário e suficiente que os segmentos $AP'$ e $A'P$ tenham o mesmo ponto médio.

Portanto, se $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$, $P = (m, n, p)$ e $P' = (m', n', p')$, temos $AA'$ e $PP'$ equipolentes se, e somente se,

$$a' - a = m' - m, \quad b' - b = n' - n \quad \text{e} \quad c' - c = p' - p.$$

Se escrevermos $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$ e $\gamma = c' - c$, veremos que $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ é o único ponto do espaço tal que o segmento de reta orientado $OQ$ é equipolente a $AA'$.

Em Geometria Espacial (vide Vol. 2), diz-se que os segmentos de reta $AB$ e $CD$ são *ortogonais* quando tomando-se, a partir de um ponto $O$, os segmentos $OP$ e $OQ$, respectivamente paralelos a $AB$ e $CD$, o ângulo $P\widehat{O}Q$ é reto. Reserva-se a denominação *perpendiculares* para o caso em que os segmentos dados têm um ponto em comum.

Estabeleçamos agora a condição para que sejam ortogonais os segmentos $AA'$ e $PP'$, onde $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$, $P = (m, n, p)$ e $P' = (m', n', p')$.

Como acabamos de ver, se pusermos $A'' = (a'-a, b'-b, c'-c)$ e $P'' = (m' - m, n' - n, p' - p)$, os segmentos de reta $OA''$ e $OP''$ são paralelos respectivamente a $AA'$ e $PP'$. Logo estes últimos são

ortogonais se, e somente se $OA''$ e $OP''$ são perpendiculares, isto é, se

$$(a'-a)(m'-m)+(b'-b)(n'-n)+(c'-c)(p'-p)=0.$$

A fórmula da distância entre dois pontos no espaço tem como conseqüência imediata a equação da esfera. Como se sabe, a esfera $S$ de centro no ponto $A=(a,b,c)$ e raio $r>0$ é o conjunto dos pontos $P=(x,y,z)$ situados à distância $r$ do centro $A$. Portanto o ponto de coordenadas $x$, $y$, $z$ pertence à esfera $S$ se, e somente se

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Em particular a equação da esfera de centro na origem $O=(0,0,0)$ e raio $r$ é:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

**Exemplo.** A superfície $T$, formada pelos pontos $P=(x,y,z)$ tais que $z=x^2+y^2$, é chamada um *parabolóide de revolução*. Seja $S$ a esfera de centro na origem e raio 1, isto é, o conjunto dos pontos $(x,y,z)$ tais que $x^2+y^2+z^2=1$. Mostremos que a interseção $S\cap T$ é uma circunferência contida num plano horizontal, com centro sobre o eixo $OZ$. Com efeito, se o ponto $P=(x,y,z)$ pertence a $S\cap T$ então temos simultaneamente

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{e} \quad z=x^2+y^2,$$

logo

$$z^2+z=1,$$

ou seja

$$z^2-z+1=0.$$

As raízes desta equação são

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Mas $z=x^2+y^2>0$, portanto os pontos da interseção da esfera com o parabolóide têm todos a coordenada $z$ igual a $(-1+\sqrt{5})/2=c$ e

as outras duas coordenadas $x$ e $y$ cumprem $x^2 + y^2 = c$, portanto pertencem à circunferência de centro no ponto $(0, 0, c)$ e raio $\sqrt{c}$, situada no plano $z = c$.

## 5. Vetores no espaço

Quando os segmentos orientados $AA'$ e $PP'$ no espaço $E$ são equipolentes, escrevemos $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'}$ e dizemos que eles representam o mesmo *vetor* $v = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'}$.

Dado o sistema de coordenadas OXYZ, com $A = (a, b, c)$, $A' = (a', b', c')$, $P = (m, n, p)$ e $P' = (m', n', p')$, tem-se $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'} = v$ se, e somente se, $a' - a = m' - m$, $b' - b = n' - n$ e $c' - c = p' - p$. Pondo $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$ e $\gamma = c' - c$, escreve-se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e diz-se que estas são as coordenadas do vetor $v = \overrightarrow{AA'}$ no sistema OXYZ.

Se $v = \overrightarrow{AA'}$ é um vetor e $P$ é um ponto arbitrário do espaço, existe um único ponto $P'$ tal que $\overrightarrow{PP'} = v$. Como vimos na seção anterior, quando $P = (x, y, z)$ e $v = (\alpha, \beta, \gamma)$, tem-se $P' = (x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)$.

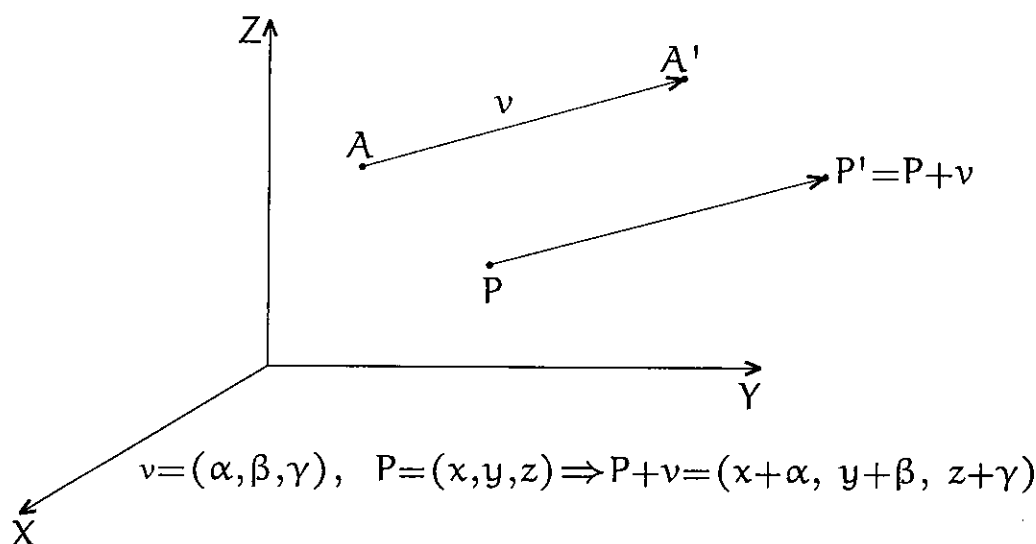



**Figura 61**

Escreve-se $P' = P + v$ para significar que $\overrightarrow{PP'} = v$ e diz-se que o vetor $v$ transporta o ponto $P$ para a posição $P'$. Fixado o vetor

$v$, tem-se então a função $T_v \colon E \to E$, chamada a *translação* definida por $v$, onde $T_v(P) = P + v$ para todo $P \in E$.

A translação $T_v \colon E \to E$ não apenas transforma cada ponto $P \in E$ no ponto $P'$ tal que $\overrightarrow{PP'} = v$ mas opera também sobre uma figura qualquer $F \subset E$, transformando-a na figura $F + v = \{P + v; P \in F\}$, que se diz transladada de $F$ por $V$.

Como no caso do plano, é conveniente introduzir o *vetor nulo* $0 = \overrightarrow{AA}$, representado por um segmento de reta degenerado, com ponto inicial igual ao final. Ele é indicado pelo mesmo símbolo 0 que se usa para representar o número zero. Para todo ponto $P$ do espaço tem-se $\overrightarrow{PP} = 0$. Em relação a qualquer sistema, as coordenadas do vetor nulo são $O = (0, 0, 0)$. A translação $T_0 \colon E \to E$, determinada por esse vetor, é simplesmente a função identidade.

A adição de vetores e o produto de um vetor por um número real se definem no espaço exatamente do mesmo modo que no plano. Em relação a um sistema de coordenadas $OXYZ$, se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $v' = (\alpha', \beta', \gamma')$ então

$$v + v' = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma')$$

e

$$\lambda v = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma).$$

Se $V = \overrightarrow{AB}$ então o vetor $-v = \overrightarrow{BA}$, chamado o *simétrico*, ou *oposto* de $v$ tem a propriedade de que $-v + v = v + (-v) = 0$, por isso se diz que $-v$ é o *inverso aditivo* de $v$. Se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ então $-v = (-\alpha, -\beta, -\gamma)$.

Valem as propriedades formais $v + w = w + v$, $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ e $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

Quanto ao produto interno $\langle v, w\rangle$, é mais conveniente começar com a definição

$$\langle v, w\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

onde $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $w = (\alpha', \beta', \gamma')$ são as coordenadas desses vetores com respeito a um sistema de coordenadas $OXYZ$ arbitra-

riamente fixado.

Desta definição resulta imediatamente que $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ e $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, para quaisquer vetores $u$, $v$, $w$ e qualquer número real $\lambda$.

Além disso, os vetores $v$ e $w$ são ortogonais, (ou seja, pondo $v = \overrightarrow{OA}$ e $w = \overrightarrow{OB}$ os segmentos $OA$ e $OB$ são perpendiculares) se, e somente se, $\langle v, w\rangle = 0$.

O símbolo $|v|$ indica o *comprimento* do vetor $v$, isto é, o comprimento de qualquer segmento $AA'$ tal que $v = \overrightarrow{AA'}$. Portanto, se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$, tem-se

$$|v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Se $|v| = 1$, diz-se que $v$ é um vetor *unitário*.

Se os vetores $v$ e $w$ são ambos diferentes do vetor nulo, escrevendo $v = \overrightarrow{OA}$ e $w = \overrightarrow{OB}$, os segmentos $OA$ e $OB$ formam um ângulo que pode ser agudo, reto ou obtuso logo seu cosseno, que chamaremos $\cos\theta$, pode ser positivo, nulo ou negativo.

Mostraremos agora que a definição acima dada para o produto interno $\langle v, w\rangle$ equivale a dizer que

$$(*) \qquad \langle v, w\rangle = |v|\,|w| \cos\theta.$$

Observe-se que a definição $\langle v, w\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$, que demos acima, aparentemente é o produto interno de $v$ e $w$ relativamente ao sistema de coordenadas $OXYZ$. Se tomássemos outro sistema, as coordenadas de $v$ e $w$ seriam outras e nada garantiria, a priori, que o valor do produto interno $\langle v, w\rangle$ se manteria o mesmo.

Mas, se provarmos que $\langle v, w\rangle = |v|\,|w| \cos\theta$, veremos que o produto interno independe do sistema de coordenadas tomado pois os comprimentos $|v|$ e $|w|$, bem como o ângulo $\theta$, não têm nada a ver com coordenadas: são noções geométricas intrínsecas.

Suponhamos, inicialmente, que $|v| = |w| = 1$.

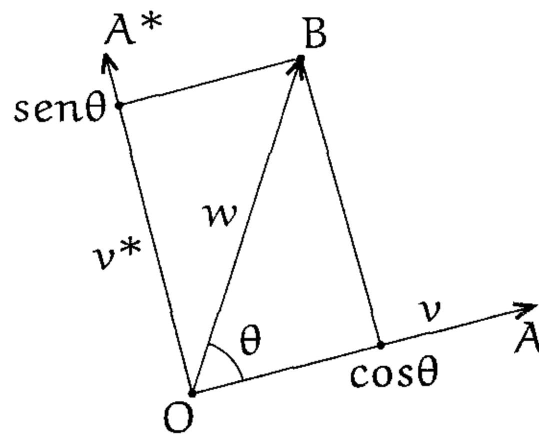



**Figura 62**

Sejam $v = \overrightarrow{OA}$ e $w = \overrightarrow{OB}$. Consideremos um vetor unitário $v^* = \overrightarrow{OA^*}$, com $OA^* \perp OA$ e $A^*$ no mesmo plano que O, A e B. Então, pela definição de seno e de cosseno, pondo $v^* = \overrightarrow{OA^*}$, temos:

$$w = \cos\theta \cdot v + \operatorname{sen}\theta \cdot v^*.$$

Como $v$ e $v^*$ são ortogonais, seu produto interno é $\langle v, v^* \rangle = 0$. Assim, se tomarmos o produto interno de ambos os membros da igualdade acima por $v$ e usarmos as regras $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ e $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \cdot \langle v, w \rangle$ obteremos

$$\langle v, w \rangle = \cos\theta.$$

Portanto a igualdade (*) é verdadeira quando $v$ ou $w$ é igual a zero e quando esses dois vetores são unitários.

Sejam agora $v$ e $w$ vetores não-nulos quaisquer. Pondo $v' = (1/|v|) \cdot v$ e $w' = (1/|w|) \cdot w$, os vetores $v'$ e $w'$ são unitários, com $v = |v|v'$ e $w = |w|w'$. Então, como o ângulo entre $v'$ e $w'$ é $\theta$, vem:

$$\langle v, w \rangle = \langle |v|v', |w|w' \rangle = |v|\,|w|\langle v, w' \rangle = |v|\,|w| \cos\theta.$$

A igualdade (*) está provada em todos os casos. Dela resulta que se $\theta$ é um dos ângulos formados por duas retas AB e AC que têm o ponto A em comum então

$$|\cos\theta| = \frac{|\langle v, w \rangle|}{|v|\,|w|}, \text{onde } v = \overrightarrow{AB} \text{ e } w = \overrightarrow{AC}.$$

Como observamos no capítulo anterior, duas retas que se cortam no ponto A formam quatro ângulos, que são dois a dois iguais ou suplementares, logo seus cossenos diferem pelo sinal ou são iguais. Daí o valor absoluto na fórmula acima. Se as retas dadas forem orientadas, digamos de A para B e de A para C (o que equivale a considerar as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ ) então seu ângulo está bem determinado: pode ser agudo, reto ou obtuso e seu cosseno vale $\langle v, w\rangle / |v|\,|w|$, sinal incluído.

## 6. Equação do plano

Seja $\Pi$ um plano no espaço E, onde se escolheu um sistema de coordenadas OXYZ. Tomemos a reta OA, que passa pela origem, pelo ponto $A = (a, b, c)$ e é perpendicular ao plano $\Pi$.

Afirmamos que existe um número real d tal que a equação do plano $\Pi$ é

$$ax + by + cz = d,$$

isto é, o ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano $\Pi$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a relação acima.

Com efeito, se tomarmos dois pontos arbitrários $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

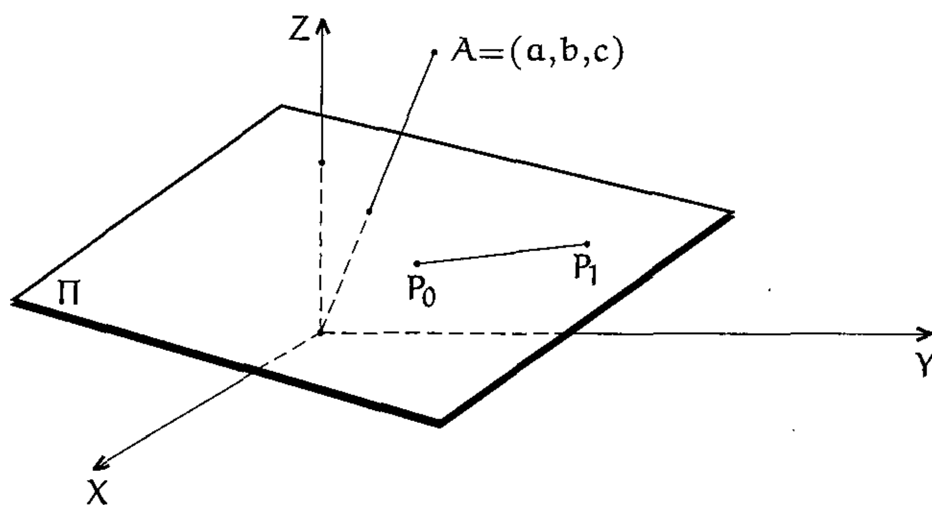



**Figura 63**

e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ no plano $\Pi$, o segmento $P_0P_1$ é ortogonal a OA,

ou seja, tem-se

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0,$$

logo

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_0 + by_0 + cz_0 .$$

Portanto, a expressão $ax+by+cz$ assume um valor constante para todo ponto $P = (x, y, z)$ em $\Pi$. Este valor é o que chamamos de d. Assim,

$$P = (x, y, z) \in \Pi \Rightarrow ax + by + cz = d.$$

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ satisfazem a relação $ax + by + cz = d$ então, tomando $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ tem-se, como acabamos de ver, $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ e, por subtração vem

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja, o segmento $PP_0$ é ortogonal a OA. Portanto $P \in \Pi$.

Conclusão: $P = (x, y, z)$ pertence ao plano $\Pi$ se, e somente se, $ax + by + cz = d$.

Se o plano $\Pi$ contém a origem O, sua equação é satisfeita quando $x = y = z = 0$, logo $d = 0$ e a equação de $\Pi$ tem a forma $ax + by + cz = 0$.

Para que a reta OA seja determinada, deve-se ter $A \neq O$, portanto as coordenadas do ponto $A = (a, b, c)$ não podem ser todas iguais a zero. Portanto, sempre que nos referirmos à equação $ax + by + cz = d$ como equação de um plano, fica tacitamente admitido que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Seja qual for a número real $k \neq 0$, as equações $ax+by+cz = d$ e $kax + kby + kcz = kd$ definem o mesmo plano. Reciprocamente, se as equações $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$ definem o mesmo plano [isto é, têm as mesmas soluções $(x, y, z)$] então existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e $d' = kd$.

Para provar esta última afirmação, observemos que, sendo os segmentos OA e OA′, com $A = (a, b, c)$ e $A' = (a', b', c')$, ambos

perpendiculares ao plano $\Pi$, definido pelas duas equações, o ponto $A'$ pertence à reta $OA$ (cujas equações paramétricas são $x = ta$, $y = tb$, $z = tc$) logo $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$, com $k \neq 0$ pois $A' \neq O$. Além disso, tomando um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ em $\Pi$ temos

$$d = a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = kax_0 + kby_0 + kcz_0 = k(ax_0 + by_0 + cz_0) = kd.$$

A fim de que os planos $\Pi$ e $\Pi'$, definidos pelas equações

$$(*) \qquad ax + by + cz = d \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c'z = d',$$

sejam paralelos (isto é, não tenham pontos em comum) é necessário e suficiente que, para algum $k \neq 0$, se tenha $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e $d' \neq kd$.

Com efeito, se estas relações são satisfeitas então

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \Pi &\Rightarrow ax + by + cz = d \\ &\Rightarrow kax + kby + kcz = kd \\ &\Rightarrow a'x + b'y + c'z = kd \neq d' \\ &\Rightarrow P \notin \Pi'. \end{aligned}$$

Logo as condições $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$, $d' \neq kd$ implicam que os planos $\Pi$ e $\Pi'$ são paralelos. Reciprocamente, se os planos $\Pi$ e $\Pi'$, definidos pelas equações (*), são paralelos então os segmentos $OA$ e $OA'$, perpendiculares a esses planos, são colineares, logo, para algum $k \neq 0$ tem-se $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$. Mas deve ser necessariamente $d' \neq kd$ pois do contrário as equações (*) definiriam o mesmo plano e teríamos $\Pi = \Pi'$.

Completando a discussão, resta uma última possibilidade: a fim de que os planos $\Pi$ e $\Pi'$, definidos pelas equações

$$(*) \qquad ax + by + cz = d \quad \text{e} \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

não coincidam nem sejam paralelos (portanto se intersectem segundo uma reta) é necessário e suficiente que para nenhum $k \in \mathbb{R}$ (o qual é necessariamente $\neq 0$ pois os coeficientes da equação de

um plano não podem ser todos nulos) se tenha $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$.

Noutras palavras, os planos $\Pi$ e $\Pi'$, definidos pelas equações (*) têm uma reta em comum se, e somente se, os vetores não-nulos $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$ não são múltiplos um do outro.

Isto nos dá outra maneira de representar analiticamente uma reta no espaço. Além de ser descrita por suas equações paramétricas, como vimos na seção 3, a reta $r$ pode ser caracterizada como o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas são as soluções do sistema de equações (*), onde os vetores $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$ não são múltiplos um do outro.

**Exemplo.** A reta definida pelo par de equações $x + 2y + 3z = 6$, $4x + 5y + 6z = 15$ contém os pontos $(-1, 5, -1)$ e $(1, 1, 1)$ logo suas equações paramétricas são $x = 1 + 2t$, $y = 1 - 4t$, $z = 1 + 2t$.

## 7. Distância de um ponto a um plano

Inicialmente consideremos o plano $\Pi$, definido pela equação $ax + by + cz = d$, e o plano $\Pi'$, dado pela equação $ax + by + cz = d'$, com o mesmo primeiro membro. Eles são paralelos se $d \neq d'$ e coincidem quando $d = d'$. Qual é a distância entre esses planos?

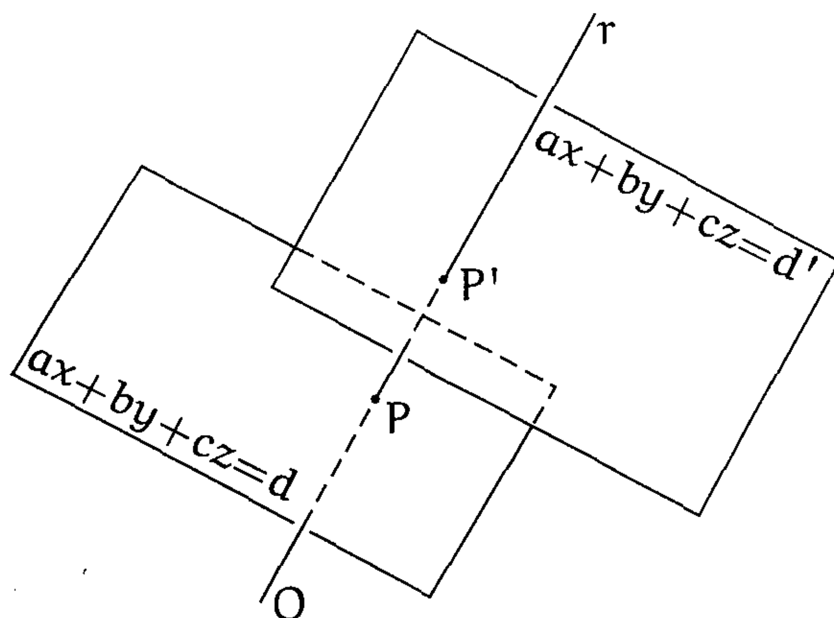



**Figura 64**

A reta $r = \{(at, bt, ct); t \in \mathbb{R}\}$, que passa pela origem, é perpendicular aos planos $\Pi$ e $\Pi'$ e os intersecta nos pontos $P$ e $P'$ respectivamente. A distância entre os planos $\Pi$ e $\Pi'$ é igual à distância entre os $P = (ta, tb, tc)$ e $P' = (t'a, t'b, t'c)$. Devemos portanto determinar os valores de $t$ e $t'$. Como $P \in \Pi$, temos

$$a(ta) + b(tb) + c(tc) = d, \quad \text{donde} \quad t = \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Analogamente, $t' = d'/(a^2 + b^2 + c^2)$. Daí decorre facilmente que

$$d(P', P) = \frac{|d' - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Em seguida, determinemos a distância do ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano $\Pi$, dado pela equação $ax + by + cz = d$. Se escrevermos $d_0 = ax_0 + by_0 + cz_0$, veremos que o ponto $P_0$ pertence ao plano $\Pi_0$, paralelo a (ou coincidente com) $\Pi$, definido pela equação $ax + by + cz = d_0$. Além disso, a distância $d(P_0, \Pi)$ de $P_0$ ao plano $\Pi$ é igual à distância entre os planos $\Pi_0$ e $\Pi$.

Portanto

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Exemplo.** A distância da origem ao plano $ax + by + cz = d$ é igual a $|d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

## Exercícios

1) Um plano vertical $\Pi$ corta os eixos OX e OY nos pontos $A = (3, 0, 0)$ e $B = (0, -1, 0)$. Determine os coeficientes $a$, $b$, $c$, $d$ de modo que um ponto $P = (x, y, z)$ pertença a $\Pi$ se, e somente se, $ax + by + cz = d$.

2) (Certo ou errado?) Quando se passa do sistema de coordenadas OXYZ para o sistema OXZY então (a) Os planos horizontais passam a ser verticais; (b) Os planos verticais passam a ser horizontais.

3) Determine os pontos em que a reta AB intersecta cada um dos planos $\Pi_{xy}$, $\Pi_{yz}$ e $\Pi_{xz}$, sabendo que $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$.

4) Sejam $A = (3, 5, 2)$, $B = (-1, -1, 4)$, $C = (2, 1, 5)$, $D = (0, 3, 1)$. Mostre que as retas AB e CD têm um ponto em comum e determine as coordenadas desse ponto.

5) Dados $A = (3, 5, 2)$ e $B = (-1, -1, 4)$, determine equações paramétricas para a reta paralela a AB passando pelo ponto $C = (2, 1, 5)$.

6) Mostre que são reversas as retas AB e CD, onde $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 4)$, $C = (2, 3, -1)$ e $D = (3, 1, 3)$.

7) Escolhendo convenientemente o sistema de coordenadas, prove que o conjunto dos pontos do espaço que são equidistantes de dois pontos distintos A e B dados é um plano, chamado o *plano mediador* do segmento AB.

8) Use o exercício anterior para provar que, dado um segmento AB, o conjunto formado pelo ponto B e mais os pontos P tais que PB é perpendicular a AB é um plano.

9) Prove que a interseção da reta r com uma esfera S de centro A é um conjunto com 0, 1 ou 2 pontos. Mostre ainda que se $r \cap S$ tem um único ponto P então r é perpendicular a OP.

10) Sem usar coordenadas, explique o que significam as seguintes afirmações: (a) Os vetores $v$ e $w$ são ortogonais; (b) O vetor $v$ é ortogonal à reta r; (c) O vetor $v$ é ortogonal ao plano $\Pi$.

11) Sejam $v = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$ vetores não-nulos. Prove que se tem $w = \lambda \cdot v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, os segmentos de reta AB e CD são paralelos ou colineares.

12) Sejam $r = AB$ e $s = CD$ as retas do Exercício 6. Chame de $r'$ a reta paralela a r que passa pelo ponto C. Determine o cosseno do *maior* dos ângulos formados por $r'$ e $s$. Usando uma calculadora ou uma tabela, dê um valor aproximado desse

ângulo em graus, minutos e segundos.

13) Dados os vetores $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $w = (\alpha', \beta', \gamma')$, mostre que o vetor

$$u = (\beta\gamma' - \gamma\beta', \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \alpha\beta' - \beta\alpha')$$

é tal que $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = 0$. Em que condições tem- se $u = 0$?

14) Seja $u = (a, b, c)$ um vetor unitário, com $abc \neq 0$. Determine o valor de $t$ de modo que, pondo $v = (-bt, at, 0)$ e $w = (act, bct, -1/t)$, os vetores $u$, $v$, $w$ sejam unitários e dois a dois ortogonais. Investigue se a hipótese $abc \neq 0$ pode ser atenuada ou omitida.

15) Sejam $A$ um ponto e $v$, $w$ vetores não-colineares no espaço. Considere um vetor não-nulo $u$, ortogonal a $v$ e $w$ (como no Exercício 13, por exemplo). Chame de $\Pi$ o conjunto dos pontos $P = A + sv + tw$, onde $s$ e $t$ são números reais arbitrários. Mostre que $P \in \Pi$ se, e somente se, $\langle \overrightarrow{AP}, u\rangle = 0$. Conclua que $\Pi$ é um plano. Se $A = (a, b, c)$, $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $w = (\alpha', \beta', \gamma')$, as coordenadas dos pontos $P = (x, y, z)$ do plano $\Pi$ são dadas por $x = a + s\alpha + t\alpha'$, $y = b + s\beta + t\beta'$ e $z = c + s\gamma + t\gamma'$. Estas são as *equações paramétricas* do plano $\Pi$.

16) Seja $N = (0, 0, 1)$ o pólo norte da *esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Para todo ponto $P = (x, y, z)$ da esfera $S^2$, exceto o ponto $N$, determine as coordenadas $x'$, $y'$ do ponto $P' = (x', y', 0)$, interseção da semi-reta $\overrightarrow{NP}$ (de origem $N$, passando por $P$) com o plano horizontal $\Pi_{xy}$. Reciprocamente, para todo ponto $P' = (x', y') \in \Pi_{xy}$, determine as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ em que o segmento $NP'$ intersecta a esfera $S^2$.

17) Escreva a equação do plano que corta os eixos OX, OY e OZ nos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ respectivamente, supondo $abc \neq 0$.

18) Dados os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (-1, 2, 1)$, obtenha as coordenadas de algum ponto $P \neq 0$ tal que o segmento $OP$ seja perpendicular ao plano $ABC$. A partir daí, ache uma equação do tipo $ax + by + cz = d$ para esse plano.

19) Resolva o exercício anterior escrevendo, por meio de equações, a condição para que cada um dos pontos $A$, $B$ e $C$ pertença ao plano $ax + by + cz = d$.

20) Dadas as retas paralelas $AB$ e $CD$, ache uma equação para o plano que elas determinam.

21) Qual é a equação do plano tangente, no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, à esfera de centro $A = (a, b, c)$ e raio $r$?

22) O plano $\Pi$ contém o ponto $A = (a, b, c)$ e a distância da origem a $\Pi$ é $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Qual é a equação do plano $\Pi$?

23) Seja $AA'$ uma diagonal de um cubo e sejam $B$, $C$ e $D$ os vértices do cubo mais próximos de $A$.

a) Mostre que $AA'$ é perpendicular ao plano que contém $B$, $C$ e $D$.

b) Se $AA'$ fura o plano $(BCD)$ em $P$, mostre que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

24) Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

25) Encontre 4 pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ com as seguintes propriedades:

a) nas coordenadas desses quatro pontos só aparecem os números 0 e 1.

b) $ABCD$ é um tetraedro regular.

26) Determine as coordenadas de 6 pontos que sejam vértices de um octaedro regular.

27) Calcule a distância entre duas faces opostas de um octaedro regular de aresta $a$.

28) Determine o simétrico do ponto $(3, 7, 0)$ em relação ao plano $x + 2y - z = 5$.

29) A reta $r$ é dada por suas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1. \end{cases}$$

Determine a projeção ortogonal do ponto $P = (1, 2, 5)$ sobre a reta $r$.

30) Determine o ponto do plano $2x + y + 2z = 12$ que está mais próximo da origem.

31) $ABCDE$ é uma pirâmide regular onde a base é o quadrado $ABCD$ de lado 6 e distância de $E$ ao plano da base é igual a 4.

a) encontre as coordenadas dos cinco vértices em um sistema de coordenadas de sua escolha

b) calcule o comprimento das arestas laterais da pirâmide

c) calcule o cosseno do ângulo entre as retas reversas $AE$ e $BC$

d) calcule a distância de um ponto da reta $AD$ ao plano $(EBC)$.

32) Vamos descrever um código que permite transformar uma palavra $P$ de três letras em um vetor $w \in \mathbb{R}^3$. Inicialmente, escolhe-se uma matriz $3 \times 3$. Por exemplo, a nossa "matriz-código" será:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da correspondência:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | X | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |

a palavra P é transformada em um vetor $v$ do $\mathbb{R}^3$. Em seguida, o código da palavra P é obtido pela operação $w = Av$.

Por exemplo, a palavra MAR corresponde ao vetor $(12, 1, 17) = v$ que é codificada com $w = Av = (26, 56, 19)$.

Usando o processo acima, decodifique $w = (64, 107, 29)$.

33) Para cada $k \in \mathbb{R}$, o que significa a equação

$$(x + 2y - 3) + k(3x - y - 2) = 0\,?$$

34) Para cada $k \in \mathbb{R}$, o que significa a equação

$$(x - y + z - 1) + k(2x + y - 3z) = 0\,?$$

35) Prove que três vetores $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$, com A, B, C e D situados no mesmo plano, são linearmente dependentes. Prove também que quatro vetores quaisquer no espaço são linearmente dependentes.

36) Prove que duas arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais.

37) Ache o raio da esfera inscrita no tetraedro cujos vértices são $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

38) Um plano $\Pi$ tem a seguinte propriedade: se P e Q são pontos de $\Pi$ e $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ então R pertence a $\Pi$. Prove que o plano $\Pi$ passa pela origem.

39) Escreva a equação do plano que passa pelos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$, com $abc \neq 0$.

40) Seja X um conjunto no espaço que contêm pelo menos dois pontos. Suponha que X tem a seguinte propriedade: a reta que une dois pontos quaisquer de X está contida inteiramente em X. Prove que X é uma reta ou um plano.

Capítulo 3

# Sistemas de Equações Lineares

## 1. Sistemas com duas incógnitas

Salvo menção explícita em contrário, fica convencionado que, ao escrevermos uma equação $ax + by = c$, estaremos admitindo tacitamente que $a^2 + b^2 \neq 0$, isto é, que os coeficientes $a$ e $b$ não se anulam simultaneamente.

Uma *solução* do sistema linear

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

é um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas $x$, $y$ satisfazem ambas equações. O sistema (*) se diz *indeterminado, impossível* ou *determinado* quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução respectivamente. Como vimos no Capítulo 1, cada equação em (*) tem como soluções as coordenadas $(x, y)$ dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, conforme as retas $r_1$ e $r_2$, representadas pelas duas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes respectivamente.

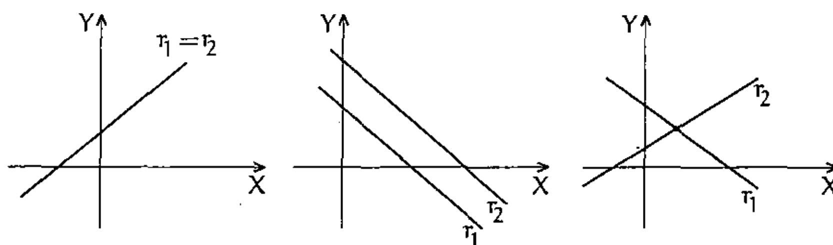



**Figura 65**

Para decidir em qual dessas três alternativas se enquadra o sistema (*), deve-se examinar o quadro dos coeficientes

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Ele é um exemplo do objeto matemático chamado uma *matriz*. Mais especificamente, uma matriz com duas linhas e três colunas, ou seja, uma matriz $2 \times 3$. Suas linhas são os vetores $(a_1, b_1, c_1)$ e $(a_2, b_2, c_2)$, pertencentes a $\mathbb{R}^3$, e suas colunas são os vetores $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ e $(c_1, c_2)$, em $\mathbb{R}^2$. A matriz m chama-se a *matriz aumentada* do sistema (*).

Duas retas que possuem mais de um ponto em comum devem coincidir. Logo o sistema (*) é indeterminado se, e somente se, suas equações definem a mesma reta. Como vimos no Capítulo 1 (seção 6), isto ocorre se, e somente se, existe um número real $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 = kc_1$. Uma forma mais prática de exprimir as igualdades $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, sem referência ao número k, é dizer que se tem $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$. Analogamente, os outros dois pares de igualdades equivalem a $a_1c_2 - c_1a_2 = 0$ e $b_1c_2 - c_1b_2 = 0$. Foi visto no Capítulo 1 (seção 6), que isto ocorre se, e somente se, existe um número $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 = kc_1$, isto é, os vetores-linha $L_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $L_2 = (a_2, b_2, c_2)$ da matriz m são colineares (múltiplos um do outro). Uma forma de exprimir esta condição sem referência ao número k consiste em dizer que

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0.$$

O sistema (*) é impossível quando as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são paralelas. Para que isto aconteça, como vimos no Capítulo 1, é necessário e suficiente que exista $k \neq 0$ com $a_2 = ka_1$, $b = kb_1$ e $c_2 \neq kc_1$. Equivalentemente, o sistema (*) é impossível se, e somente se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ mas pelo menos um dos números $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ é diferente de zero.

O número $a_1b_2 - a_2b_1$ chama-se o *determinante* da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

do sistema.

Finalmente, o sistema (*) é determinado quando não é indeterminado nem impossível. Isto ocorre quando as retas $a_1x+b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são concorrentes, ou seja, quando o determinante $a_1b_2 - a_2b_1$ é diferente de zero. Dito de outro modo: quando os vetores-linha $\ell_1 = (a_1, b_1)$ e $\ell_2 = (a_2, b_2)$ da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

não são múltiplos um do outro.

Diz-se que um vetor $w$ é *combinação linear* dos vetores $u$ e $v$ quando existem números $x$, $y$ tais que $w = xu + yv$.

O sistema (*), que foi analisado acima sob o ponto de vista de suas linhas, pode também ser olhado em termos das colunas $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$, $w = (c_1, c_2)$ de sua matriz aumentada. Sob este ângulo, afirmar que $(x, y)$ é uma solução do sistema equivale a dizer que $w = xu + yv$. Portanto, o sistema possui solução se, e somente se, $w$ é combinação linear dos vetores $u$ e $v$. Resulta então da discussão acima que se esses vetores $u = (a_1, a_2)$ e $v = (b_1, b_2)$ são tais que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ então qualquer vetor $w = (c_1, c_2)$ em $\mathbb{R}^2$ se exprime (de modo único) como combinação linear deles. Neste caso (isto é, quando $u$ e $v$ não são múltiplos um do outro) diz-se que os vetores $u$ e $v$ são *linearmente independentes*.

Dois sistemas dizem-se *equivalentes* quando admitem as mesmas soluções. Quando se substitui uma das equações do sistema pela soma desta equação com um múltiplo da outra, obtém-se um sistema equivalente. Noutras palavras, para todo $k \in \mathbb{R}$, os dois sistemas abaixo possuem as mesmas soluções:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_1)y = c_2 + kc_1 . \end{cases}$$

Para resolver o sistema pelo *método da eliminação*, escolhe-se o número k de modo que um dos coeficientes $a_2 + ka_1$ ou $b_2 + kb_1$ seja zero. Isto dá imediatamente o valor de uma das incógnitas, o qual é substituído na primeira equação para encontrar o outro valor.

Sob o ponto de vista geométrico, quando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ as

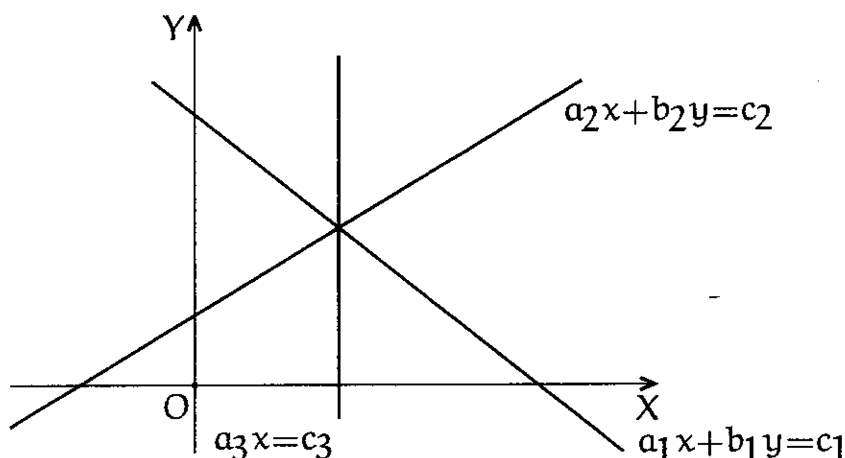



**Figura 66**

retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ se cortam num certo ponto $(x_0, y_0)$. Para qualquer número k, pondo $a_3 = a_1 + ka_2$, $b_3 = b_1+kb_2$ e $c_3 = c_1+kc_2$, a reta $a_3x+b_3y = c_3$ ainda passa pelo ponto $(x_0, y_0)$. Escolhendo k de modo a anular um dos coeficientes $a_3$ ou $b_3$ equivale a obter a reta $a_3x + b_3y = c_3$ horizontal ou vertical, o que permite determinar imediatamente uma das coordenadas $x_0$ ou $y_0$.

## 2. Duas equações com três incógnitas

O terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ chama-se uma *solução* do sistema

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

quando suas coordenadas x, y, z satisfazem ambas equações.

Fixado um sistema de coordenadas OXYZ no espaço E, as

equações acima representam planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$ que são perpendiculares respectivamente aos segmentos $OA_1$ e $OA_2$, onde $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Os planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$ podem ser paralelos, podem coincidir ou podem intersectar-se segundo uma reta. Correspondentemente a estas alternativas, o sistema (*) pode ser impossível (sem solução) no primeiro caso ou indeterminado (com uma infinidade de soluções) no segundo caso.

Nos estudos elementares costuma-se dar pouca importância aos sistemas indeterminados. Tal atitude não se justifica. Esses sistemas são interessantes, cabendo-nos descrever explicitamente suas soluções, procurando entre elas as que melhor respondem ao problema que conduziu às equações.

O sistema (*) dá origem às duas matrizes abaixo. A primeira é chamado a *matriz* do sistema e, a segunda, a *matriz aumentada*:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Os vetores $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$, em $\mathbb{R}^3$, são as linhas da matriz do sistema.

Para falar dos vetores-linha

$$L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \quad \text{e} \quad L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$$

da matriz aumentada, diremos algumas palavras sobre o espaço $\mathbb{R}^4$.

Os elementos do conjunto $\mathbb{R}^4$ são as listas ordenadas de quatro números reais, como $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Eles são chamados os vetores do espaço a quatro dimensões $\mathbb{R}^4$.

Para esses vetores, põem-se as seguintes definições:

$$\begin{aligned} v + w &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4); \\ \alpha \cdot v &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4), \ \ \alpha \in \mathbb{R}; \\ -v &= (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4); \\ 0 &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Ficam assim introduzidas em $\mathbb{R}^4$ operações análogas àquelas que conhecemos para vetores no plano e no espaço tridimensional. Em particular, uma expressão do tipo $\alpha_1 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ , onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números reais e $v_1, \ldots, , v_n \subset \mathbb{R}^4$ chama-se uma *combinação linear* dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.

Sabemos que os planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$, definidos pelas equações do sistema (*), coincidem se, e somente se, existe um número $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$ e $d_2 = kd_1$. Isto equivale a dizer que

$$\begin{aligned} a_1b_2 - a_2b_1 &= a_1c_2 - a_2c_1 \\ &= a_1d_2 - a_2d_1 \\ &= b_1c_2 - b_2c_1 \\ &= b_1d_2 - b_2d_1 \\ &= c_1d_2 - c_2d_1 = 0. \end{aligned}$$

Também podemos exprimir este fato dizendo que os vetores-linha $L_1$ e $L_2$ da matriz aumentada são múltiplos um do outro: $L_2 = k \cdot L_1$.

Os planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$ são paralelos (isto é, o sistema (*) é impossível) se, e somente se, existe $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$ mas $d_2 \neq kd_1$. Isto quer dizer que os vetores-linha da matriz de sistema são múltiplos um do outro ($\ell_2 = k\ell_1$) mas isto não se dá com os vetores-linha $L_1$, $L_2$ da matriz aumentada. Tem-se portanto $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ mas ao menos um dos números $a_1d_2 - a_2d_1$, $b_1d_2 - b_2d_1$ ou $c_1d_2 - c_2d_1$ é diferente de zero.

Finalmente, os planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$ se intersectam segundo uma reta quando não coincidem nem são paralelos. Para que isto aconteça é necessário e suficiente que (pelo menos) um dos três números $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ seja diferente de zero. Esta condição equivale a dizer que os vetores-linha $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$ da matriz do sistema não são colineares (múltiplos um do outro). Nese caso, o sistema (*) é indeterminado.

O sistema (*) também é indeterminado quando suas equações definem o mesmo plano $\Pi_1 = \Pi_2$. Mas há uma diferença entre as duas situações: quando $\Pi_1 = \Pi_2$, as soluções do sistema dependem de dois parâmetros livres; quando $\Pi_1 \cap \Pi_2$ é uma reta, essas soluções são expressas em função de um único parâmetro livre. Ilustremos este ponto por meio de casos particulares.

**Exemplo.** As equações do sistema

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 8 \\ 9x - 6y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

definem o mesmo plano, no qual se tem $z = -3x + 2y + 4$. Portanto, as soluções deste sistema são os ternos $(x, y, -3x + 2y + 4)$, onde os dois parâmetros $x$, $y$ assumem livremente quaisquer valores reais.

**Exemplo.** No sistema

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 8 \\ 9x - 6y + 2z &= 12 \end{aligned}$$

os vetores-linha $(6, -4, 2)$ e $(9, -6, 2)$ não são colineares pois $-4 \cdot 2 - 2 \cdot (-6) \neq 0$. Logo os planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$, definidos por suas equações, se intersectam segundo uma reta $r$. O ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ se, e somente se, $(x, y, z)$ é uma solução do sistema. Para exprimir todas essas soluções em função de um único parâmetro, resolvemos o sistema

$$\begin{aligned} -4y + 2z &= 8 - 6x \\ -6y + 2z &= 12 - 9x, \end{aligned}$$

no qual consideramos $y$ e $z$ apenas como incógnitas, obtendo $y = \frac{3}{2}x - 2$, $z = 0$. Assim as soluções do sistema proposto são os ternos

$$\left(x, \frac{3}{2}x - 2, 0\right),$$

onde o parâmetro $x$ pode assumir qualquer valor real.

**Exemplo.** No sistema

$$6x - 4y + 2z = 9$$
$$9x - 6y + 3z = 12,$$

os vetores-linha $(6,-4,2)$ e $(9,-6,3)$ de sua matriz são colineares, mas o mesmo não ocorre com os vetores-linha $(6,-4,2,9)$ e $(9,-6,3,12)$ da matriz aumentada. Logo os planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$, determinados pelas duas equações, são paralelos, ou seja, o sistema dado é impossível.

Sob o ponto de vista dos vetores-coluna $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$, $w = (c_1, c_2)$ e $\delta = (d_1, d_2)$ da matriz aumentada, o sistema (*) possui solução se, e somente se, o vetor $\delta \in \mathbb{R}^2$ é uma combinação linear $\delta = xu + yv + zw$ das colunas $u$, $v$ e $w$. Como sabemos, se dois dos vetores $u$, $v$, $w$ são não-colineares (isto é, se algum dos números $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ é diferente de zero) então qualquer vetor $\delta$ em $\mathbb{R}^2$ é combinação linear deles dois (logo dos três) e o sistema possui solução.

## 3. Três equações com três incógnitas

Consideremos agora o sistema

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3\,, \end{aligned}$$

de três equações com três incógnitas. Estas equações definem, nesta ordem, os planos $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$. Um terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema quando o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à interseção $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$, isto é, quando $P$ está simultaneamente em cada um dos três planos.

O sistema (*) tem uma matriz $3 \times 3$ e uma matriz aumentada $3 \times 4$, que são respectivamente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Os vetores-linha da matriz do sistema são $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $\ell_3 = (a_3, b_3, c_3)$. Eles são perpendiculares aos planos $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$ respectivamente. Os vetores-linha da matriz aumentada são $L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e $L_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$, pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^4$. Como já foi dito antes, $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são supostos não-nulos em $\mathbb{R}^3$, logo $L_1$, $L_2$ e $L_3$ também são diferentes do vetor $0 \in \mathbb{R}^4$.

A existência de soluções do sistema (*), que passamos a discutir agora, se baseia na dependência ou independência linear desses vetores-linha. Vejamos este conceito.

Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ (em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$) são *linearmente independentes* quando nenhum deles é combinação linear dos demais. Assim, afirmar que $v_1$, $v_2$ e $v_3$ são linearmente independentes significa dizer que não se podem encontrar números $\alpha_1$ $\alpha_2$ tais que $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, nem números $\beta_1$, $\beta_3$ tais que $v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_3 v_3$, nem tampouco existem $\gamma_2$, $\gamma_3$ tais que $v_1 = \gamma_1 v_2 + \gamma_3 v_3$.

**Exemplo.** Os vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ em $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes. Com efeito, uma combinação linear qualquer de $e_2$ e $e_3$ tem a primeira coordenada igual a zero, logo não pode ser igual a $e_1$. Por motivo análogo, $e_2$ não pode ser combinação linear de $e_1$ e $e_3$, nem $e_3$ de $e_1$ e $e_2$.

Quando os vetores de um conjunto não são linearmente independentes, isto é, quando algum vetor desse conjunto pode escrever-se como combinação linear dos demais, diz-se que os vetores do conjunto dado são *linearmente dependentes*.

**Exemplo.** Sejam $u = (1,2,3)$, $v = (4,5,6)$ e $w = (7,8,9)$. Então tem-se $u = 2v - w$, logo os vetores $u$, $v$, $w$ são linearmente dependentes.

Se um dos vetores $u, v, w$ é múltiplo do outro, digamos $w = \alpha \cdot v$, então $u$, $v$ e $w$ são linearmente independentes, porque podemos escrever $w = 0 \cdot u + \alpha \cdot v$. Em particular, se um dos vetores do conjunto é igual a zero (que é múltiplo de qualquer vetor) então os

vetores desse conjunto são linearmente dependentes.

**Exemplo.** Os vetores $u = (1,2,3)$, $v = (4,5,6)$ e $w = (3,6,9)$ são linearmente dependentes pois $w = 3u$.

No exemplo acima, $w$ é combinação linear de $u$ e $v$ mas $v$ não é combinação linear de $u$ e $w$. (Toda combinação linear de $u$ e $w$ tem a forma $\alpha u + \beta w = \alpha u + \beta u = (\alpha + 3\beta)u$ logo é um múltiplo de $u$ e então não pode ser igual a $v$.)

Geometricamente, dizer que os vetores $u$, $v$, $w$ em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes significa afirmar que eles são coplanares, isto é, que se representarmos $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$ por segmentos de reta orientados com o mesmo ponto inicial $A$ então os pontos A, B, C e D estão situados num mesmo plano.

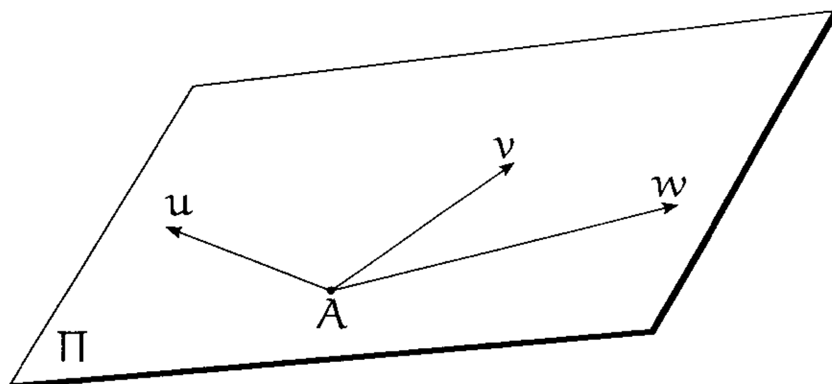



**Figura 67**

Em contraposição, dizer que os vetores $u$, $v$ e $w$ são linearmente independentes significa afirmar que, na situação acima, os pontos A, B, C e D são os vértices de um tetraedro.

Se os vetores $u$, $v$, $w$ são linearmente dependentes mas nenhum deles é múltiplo do outro então qualquer um deles é combinação linear dos outros dois. Com efeito, se tivermos (digamos) $w = \alpha u + \beta v$ então $\alpha$ e $\beta$ são ambos diferentes de zero pois $w$ não é múltiplo de $v$ enm de $u$. Logo temos

$$u = \frac{-\beta}{\alpha}v + \frac{1}{\alpha}\cdot w \quad \text{e} \quad v = -\frac{\alpha}{\beta}u + \frac{1}{\beta}w.$$

**Exemplo.** Sejam $u = (1,2,3)$, $v = (2,4,5)$ e $w = (1,2,5)$. Nenhum

desses vetores é múltiplo de outro. Logo, se eles forem linearmente dependentes, poderemos escrever $u = \alpha v + \beta w$, ou seja,

$$\begin{aligned}(1,2,3) &= (2\alpha, 4\alpha, 5\alpha) + (\beta, 2\beta, 5\beta)\\ &= (2\alpha+\beta, 4\alpha+2\beta,\ 5\alpha+5\beta).\end{aligned}$$

Isto significa:

$$2\alpha+\beta = 1, \quad 4\alpha+2\beta = 2, \quad 5\alpha+5\beta = 3.$$

Ora, as equações $2\alpha+\beta = 1$, $5\alpha+5\beta = 3$ tiramos $\alpha = 2/5$, $\beta = 1/5$. Mas estes valores de $\alpha$ e $\beta$ não satisfazem a equação $4\alpha + 2\beta = 2$. Logo $u$ não pode ser expresso como combinação linear de $v$ e $w$, portanto $u$, $v$ e $w$ são vetores linearmente independentes.

O exemplo acima sugere um método geral para decidir se um vetor $u = (a_1, b_1, c_1)$ é ou não uma combinação linear $u = \alpha v + \beta w$ dos vetores $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w(a_3, b_3, c_3)$.

Se um dos vetores $v$, $w$ é múltiplo do outro, a igualdade $u = \alpha v + \beta w$ significa que $u$ também é múltiplo de $v$ e $w$, o que pode ser constatado por mera inspeção.

Se $u$ e $v$ não são colineares, pelo menos um dos números $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - c_1a_2$, $b_1c_2 - c_1b_2$ é diferente de zero. Seja, por exemplo, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Então existe um (e somente um) par de números $\alpha$, $\beta$ tais que $\alpha a_1 + \beta a_2 = a_3$ e $\alpha b_1 + \beta b_2 = b_3$. Obtidos estes números $\alpha$ e $\beta$, testa-se a igualdade $\alpha c_1 + \beta c_2 = c_3$. Se ela for verdadeira, então $u = \alpha v + \beta w$ (com estes valores de $\alpha$ e $\beta$). Se ela for falsa, $u$ não é combinação linear de $v$ e $w$ e os vetores $u$, $v$, $w$ são linearmente independentes.

Voltemos ao sistema (*). Do ponto de vista da existência ou não de soluções do mesmo, há oito situações possíveis dos planos $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$, definidos pelas três equações. Examinaremos essas situações e mostraremos como identificá-las a partir dos vetores-linha $\ell_1$, $\ell_2$.. $\ell_3$ da matriz do sistema e $L_1$, $L_2$, $L_3$ da matriz aumentada.

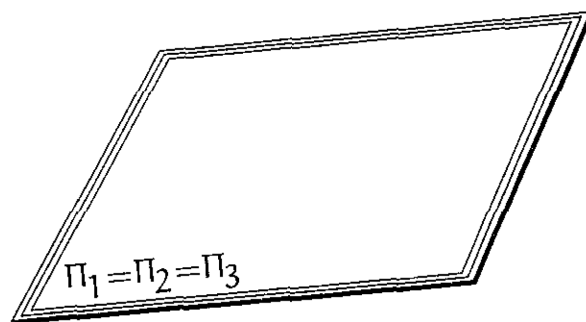



**Figura 68**

**1º caso: Os três planos coincidem**

$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$. Neste caso, o sistema é indeterminado. Todos os pontos $(x, y, z) \in \Pi_1$ são soluções. Esta situação acontece se, e somente se, os vetores $L_1$, $L_2$ e $L_3$ são colineares, isto é, múltiplos uns dos outros.

**Exemplo.** Seja o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 6 \\ 3x + 6y - 3z &= 9. \end{aligned}$$

Temos $L_1 = (1, 2, -1, 3)$, $L_2 = (2, 4, -2, 6)$, $L_3 = (3, 6, -3, 9)$, logo $L_2 = 2L_1$ e $L_3 = 3L_1$. As soluções do sistema são todos os ternos $(x, y, x + 2y - 3)$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ são arbitrários.

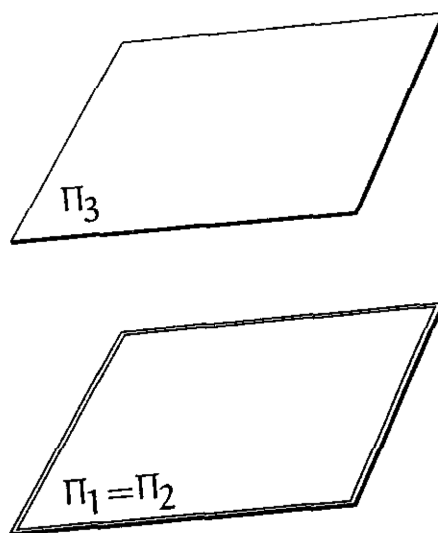



**Figura 69**

**2º caso: Dois dos planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles**
$\Pi_1 = \Pi_2$ e $\Pi_3 // \Pi_1$. Neste caso, o sistema não possui solução: é impossível. Esta situação ocorre quando $L_2 = \alpha \cdot L_1$ (logo $\ell_2 = \alpha \cdot \ell_1$), $\ell_3 = \beta \cdot \ell_1$ mas $L_3$ não é múltiplo de $L_1$.

**Exemplo.** No sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 6 \\ 3x + 6y - 3z &= 8, \end{aligned}$$

tem-se $L_2 = 2L_1$, $\ell_3 = 3\ell_1$ mas $L_3$ não é múltiplo de $L_1$. Portanto este sistema não tem solução.

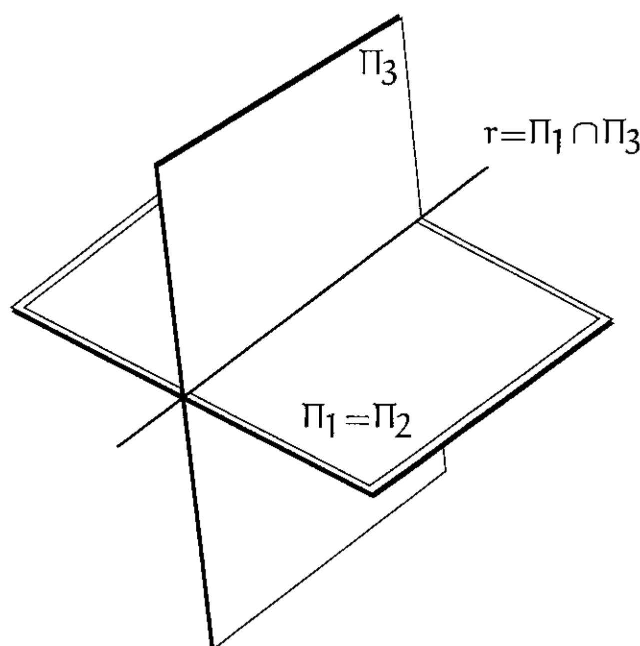



**Figura 70**

**3º caso: Dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta**
$\Pi_1 = \Pi_2$ e $\Pi_1 \cap \Pi_3 = r$. Neste caso o sistema é indeterminado. Suas soluções são as coordenadas $(x, y, z)$ dos pontos da reta $r$. Reconhece-se esta situação notando que $L_2 = \alpha \cdot L_1$ (logo $\ell_2 = \alpha \cdot \ell_1$) mas $\ell_3$ não é múltiplo de $\ell_1$.

**Exemplo.** O sistema

$$
\begin{aligned}
x + 2y - z &= 3 \\
2x + 4y - 2z &= 6 \\
3x + 6y + z &= 9
\end{aligned}
$$

apresenta $\Pi_1 = \Pi_2$ mas $\ell_3 = (3, 6, 1)$ não é múltiplo de $\ell_1 = (1, 2, -1)$, logo a interseção $\Pi_3 \cap \Pi_1$ é a reta $r$, formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas são as soluções do sistema

$$
\begin{aligned}
x + 2y - z &= 3 \\
3x + 6y + z &= 9
\end{aligned}
\quad \text{ou} \quad
\begin{aligned}
2y - z &= 3 - x \\
6y + z &= 9 - 3x
\end{aligned}
$$

Resolvendo-o na segunda forma, obtemos $y = (3 - x)/2$ e $z = 0$. Portanto as soluções do sistema dado são $\left(x, \frac{3-x}{2}, 0\right)$, para qualquer valor real de $x$. Estes pontos formam uma reta em $\mathbb{R}^3$, cujas equações paramétricas são $x = t$, $y = \frac{3}{2} - \frac{t}{2}$ e $z = 0$.

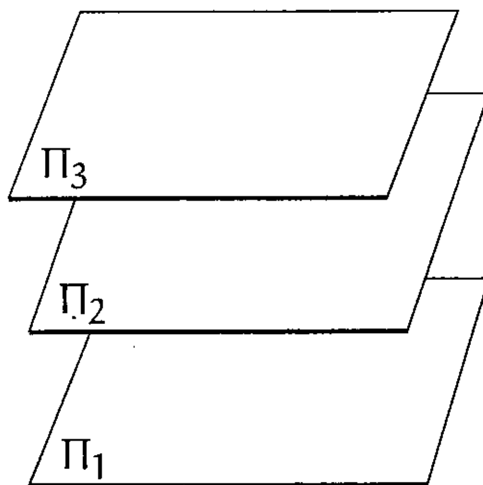



**Figura 71**

**4º caso: Os planos $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$ são paralelos dois a dois**

Neste caso, o sistema não admite solução: é impossível. Em termos dos vetores-linha, a presente situação se dá quando cada um dos vetores $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ é múltiplo de outro mas os vetores $L_1$, $L_2$, $L_3$ são dois a dois não-colineares.

**Exemplo.** Este é o caso do sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 4y - 2z &= 4 \\ 3x + 6y - 3z &= 5, \end{aligned}$$

para o qual se tem $\ell_1 = (1,2,-1)$, $\ell_2 = (2,4,-2)$ e $\ell_3 = (3,6,-3)$, logo $\ell_2 = 2\ell_1$ e $\ell_3 = 3\ell_2$. Mas as linhas da matriz aumentada, $L_1 = (1,2,-1,3)$, $L_2 = (2,4,-2,4)$ e $L_3 = (3,6,-3,5)$ são duas a duas não-colineares.

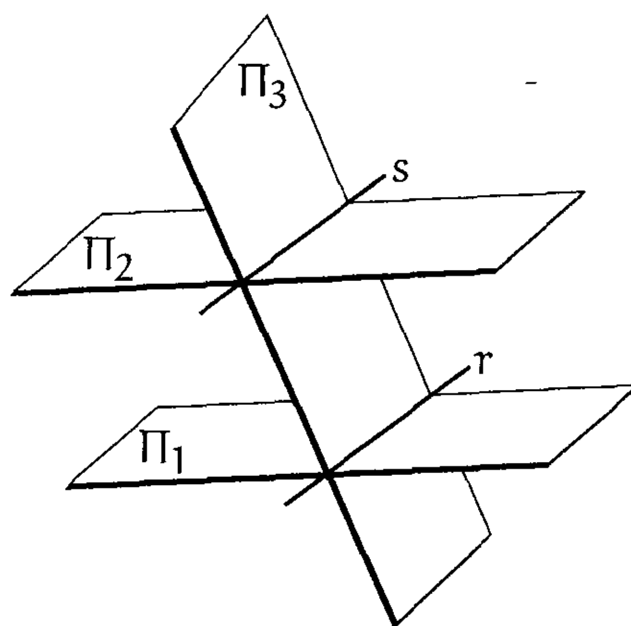



**Figura 72**

**5º caso: Os planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$ são paralelos e $\Pi_3$ os intersecta segundo retas paralelas $r$ e $s$**

Como $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$, tem-se $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \varnothing$, isto é, o sistema não possui solução: é impossível. Esta situação geométrica caracteriza-se pelas seguintes condições algébricas: $\ell_2 = \alpha \cdot \ell_1$ mas $L_2$ não é múltiplo de $L_1$ (paralelismo entre $\Pi_1$ e $\Pi_2$). Além disso, $\ell_3$ não é múltiplo de $\ell_1$ ($\Pi_3$ e $\Pi_1$ não são paralelos).

**Exemplo.** O sistema

$$x + 2y - z = 3$$
$$2x + 4y - 2z = 5$$
$$x + 2y + z = 9$$

tem $\ell_1 = (1,2,-1)$, $\ell_2 = (2,4,-2)$, $\ell_3 = (1,2,1)$ e as linhas aumentadas $L_1 = (1,2,-1,3)$, $L_2 = (2,4,-2,5)$, $L_3 = (1,2,1,9)$. Vemos que $\ell_2 = 2\ell_1$ e $L_2$ não é múltiplo de $L_1$. Portanto os planos $\Pi_1$ e $\Pi_2$ são paralelos. Notamos ainda que o vetor $\ell_3$ não é múltiplo de $\ell_1$. Logo o plano $\Pi_3$ corta os planos paralelos $\Pi_1$ e $\Pi_2$ segundo retas paralelas $r$ e $s$.

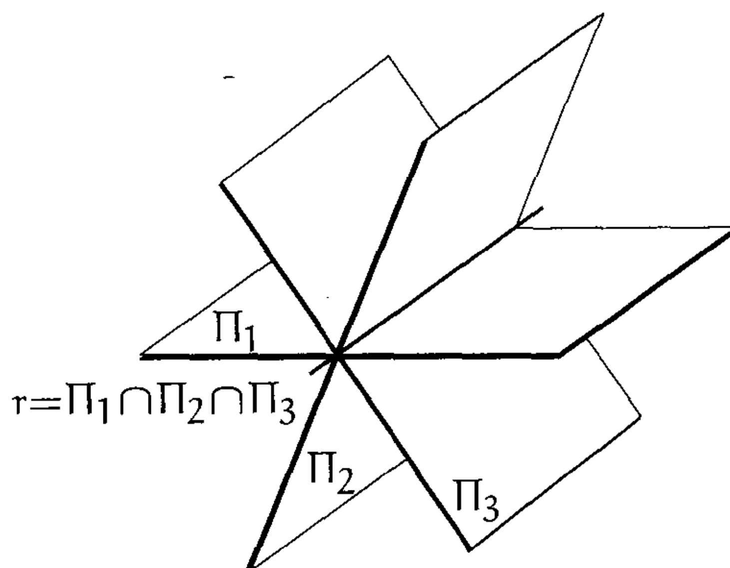



**Figura 73**

**6º caso: $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$ são três planos distintos que têm uma reta $r$ em comum**

Neste caso o sistema é indeterminado. Suas soluções $(x, y, z)$ são as coordenadas dos pontos da reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

Caracterizemos algebricamente esta situação geométrica. Não havendo paralelismo nem coincidência entre dois quaisquer dos planos $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, os vetores $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ são dois a dois não-colineares, ou seja, nenhum deles é múltiplo de outro. A reta $r$, estando contida em cada um dos três planos, é perpendicular

aos vetores $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$, logo estes vetores são coplanares: tem-se $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$. Isto nos dá:

$$a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2, \quad b_3 = \alpha b_1 + \beta b_2, \quad c_3 = \alpha c_1 + \beta c_2.$$

Se tomarmos um ponto qualquer $(x_0, y_0, z_0)$ na reta $r$ teremos $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$, $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$ e

$$\begin{aligned} d_3 &= a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_2)x_0 + (\alpha b_1 + \beta b_2)y_0 + (\alpha c_1 + \beta c_2)z_0 = \\ &= \alpha(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) + \beta(a_2x_0 + b_2y_0 +_2 z_0) = \\ &= \alpha d_1 + \beta d_2. \end{aligned}$$

Segue-se daí que $L_3 = \alpha L_2 + \beta L_1$.

Evidentemente, esta última igualdade implica $\ell_3 = \alpha\ell_2 + \beta\ell_1$.

Acabamos de mostrar que se o 6º caso ocorre então nenhum dos vetores $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ é múltiplo de outro e $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$.

Reciprocamente, se valem estas condições algébricas então os planos $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ são distintos e nenhum deles é paralelo a outro. Tomemos um ponto $(x_0, y_0, z_0)$ sobre a reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Então $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$ e $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$. Multiplicando a primeira destas igualdades por $\alpha$, a segunda por $\beta$ e somando vem:

$$(\alpha a_1 + \beta a_2)x_0 + (\alpha b_1 + \beta b_2)y_0 + (\alpha c_1 + \beta c_2)z_0 = \alpha d_1 + \beta d_2.$$

A relação $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$ permite que escrevamos a igualdade anterior como

$$a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3.$$

Isto mostra que todo ponto da reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ pertence ao plano $\Pi_3$, ou seja $r \subset \Pi_3$. Logo $r = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

Em suma: o 6º caso (três planos distintos com uma reta em comum) ocorre se, e somente se, $L_3$ é combinação linear de $L_1$ e $L_2$ e nenhum dos vetores $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ é múltiplo de outro.

**Exemplo.** Os planos definidos pelas equações do sistema

$$x + y + z = 1$$
$$2x - y + z = 3$$
$$5x + 2y + 4z = 6$$

são dois a dois distintos e têm uma reta em comum. O sistema é indeterminado. Suas soluções são os pontos da forma

$$\left(x, \frac{1}{2}x - 1, 2 - \frac{3}{2}x\right),$$

onde $x$ assume livremente qualquer valor real. Isto se dá porque os vetores $\ell_1 = (1,1,1)$, $\ell_2 = (2,-1,1)$ e $\ell_3 = (5,2,4)$ são dois a dois não-colineares, e, como se verifica facilmente, tem-se $L_3 = 3L_1 + L_2$.

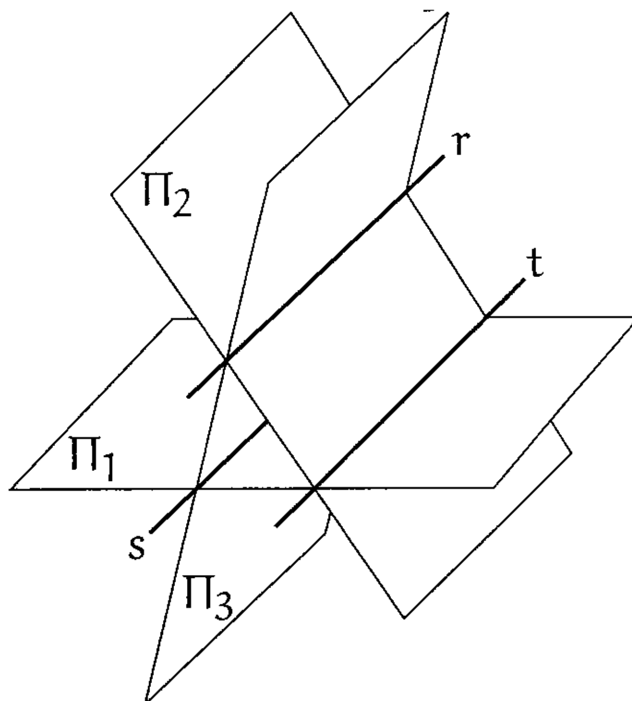



**Figura 74**

**7º caso: Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $s = \Pi_1 \cap \Pi_3$ e $t = \Pi_2 \cap \Pi_3$, paralelas umas às outras.** Neste caso, o sistema é impossível.

O fato de não haver paralelismo nem coincidência entre dois quaisquer dos planos $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$ equivale a dizer que nenhum

dos vetores $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ é múltiplo de outro. Os vetores $\ell_1$ e $\ell_2$ são ortogonais à reta $r$ porque ela está contida em $\Pi_1$ e em $\Pi_2$. O vetor $\ell_3$ é ortogonal a $s$ porque esta reta está contida em $\Pi_3$. Como $r$ e $s$ são paralelas, vemos que $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são ortogonais a $r$, portanto $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são coplanares: tem-se $\ell_3 = \alpha\ell_2 + \beta\ell_1$. Mas não se pode ter $L_3 = \alpha L_2 + \beta L_1$, como vimos no final da discussão do 6º caso; se isto acontecesse as retas $r$, $s$ e $t$ coincidiriam.

Portanto, se ocorre o 7º caso, os vetores $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são dois a dois não-colineares, tem-se $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ e $L_3 \neq \alpha L_1 + \beta L_2$.

Reciprocamente, estas condições algébricas asseguram que ocorre o 7º caso. Com efeito, as duas primeiras condições dizem que, pondo $\ell_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\ell_2 = \overrightarrow{OA_2}$ e $\ell_3 = \overrightarrow{OA_3}$, os segmentos $OA_1$, $OA_2$ e $OA_3$ estão no mesmo plano $\Pi$. A reta $r$, estando em $\Pi_1$ e $\Pi_2$, é ortogonal a $OA_1$ e a $OA_2$, logo é perpendicular a $\Pi$. Analogamente, $s$ e $t$ são também perpendiculares a $\Pi$. Assim, duas quaisquer das retas $r$, $s$ e $t$ são paralelas ou coincidem. Como $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $s = \Pi_1 \cap \Pi_3$ e $t = \Pi_2 \cap \Pi_3$, se duas dessas retas coincidirem, as três serão iguais. Mas, pelo caso anterior, isto implicaria $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$. Como estamos supondo $L_3 \neq \alpha L_1 + \beta L_2$, segue-se que $r$, $s$ e $t$ são paralelas duas a duas.

Portanto, o 7º caso ocorre se, e somente se, $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ são dois a dois não-colineares, $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ e $L_3 \neq \alpha L_1 + \beta L_2$.

**Obsrvação:** Isto equivale a dizer que $L_3$ não é combinação linear de $L_1$ e $L_2$ ou, mais simplesmente ainda, que $L_1$, $L_2$ e $L_3$ são linearmente independentes.

**Exemplo.** No sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 3x + y + z &= 2 \\ 8x + y + 6z &= 6, \end{aligned}$$

os vetores-linha $\ell_1 = (1, 2, -3)$, $\ell_3 = (3, 1, 1)$ e $\ell_3 = (8, 1, 6)$ são dois a dois não-colineares. Tem-se $\ell_3 = 3\ell_2 - \ell_1$, de modo que $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são coplanares. Mas $6 \neq 3 \times 2 - 1$, logo $L_3 \neq 3L_2 - L_1$. Portanto os

planos definidos pelas equações acima se intersectam dois a dois segundo três retas paralelas.

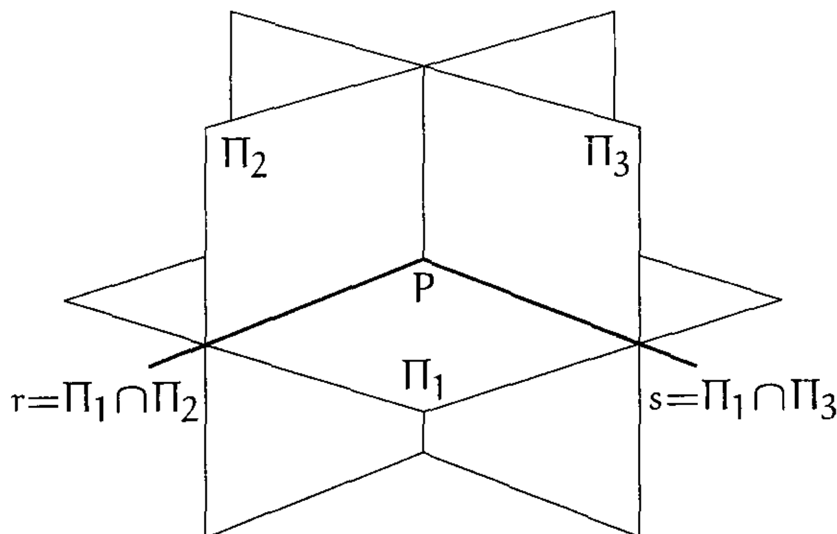



**Figura 75**

**$8^{\circ}$ caso: Os três planos $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$ têm um único ponto em comum**

Neste caso, o sistema é determinado. Do ponto de vista algébrico, isto ocorre se, e somente se, os vetores-linha $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ da matriz do sistema são linearmente independentes.

Com efeito, em primeiro lugar, se $\Pi_1\cap\Pi_2\cap\Pi_3=\{P\}$, não há paralelismo nem coincidência entre esses planos, logo os vetores $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são dois a dois não-colineares. Mais do que isto: não se pode ter $\ell_3=\alpha\ell_1+\beta\ell_2$ pois, em virtude dos dois casos anteriores, se isto acontecesse então o sistema seria indeterminado ou impossível, conforme fosse $L_3=\alpha L_1+\beta L_2$ ou $L_3\neq\alpha L_1+\beta L_2$. Portanto se o $8^{\circ}$ caso acontece os vetores $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são linearmente independentes.

Reciprocamente, se $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são linearmente independentes então nem $\ell_2$ nem $\ell_3$ é múltiplo de $\ell_1$, logo as interseções $r=\Pi_1\cap\Pi_2$ e $s=\Pi_1\cap\Pi_3$ são retas. A reta $r$, estando contida em $\Pi_1$ e $\Pi_2$, é ortogonal aos vetores $\ell_1$ e $\ell_2$. Analogamente, $s$ é ortogonal aos vetores $\ell_1$ e $\ell_3$. Escrevendo $\ell_1=\overrightarrow{OA_1}$, $\ell_2=\overrightarrow{OA_2}$ e $\ell_3=\overrightarrow{OA_3}$, isto significa que a reta $r$ é ortogonal aos segmentos $OA_1$ e $OA_2$, enquanto $s$ é ortogonal a $OA_1$ e $OA_3$. Se $r$ fosse paralela a, ou coincidisse com, $s$, os segmentos $OA_1$, $OA_2$ e $OA_3$ estariam no

mesmo plano e os vetores $\ell_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\ell_2 = \overrightarrow{OA_2}$ e $\ell_3 = \overrightarrow{OA_3}$ seriam linearmente dependentes, o que é absurdo. Logo as retas $r$ e $s$, situadas sobre o plano $\Pi_1$, têm um ponto $P$ em comum. Este ponto $P$ pertence a $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ e nenhum outro ponto $Q$ pode pertencer a esta interseção porque então $Q$ pertenceria a $\Pi_1 \cap \Pi_2 = r$ e a $\Pi_1 \cap \Pi_3 = s$ mas $r$ e $s$ têm apenas o ponto $P$ em comum.

Em suma: o sistema (*) possui uma única solução se, e somente se, os vetores $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $\ell_3 = (a_3, b_3, c_3)$ são linearmente independentes.

**Exemplo.** Dado o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 1, \end{aligned}$$

podemos ver que os vetores-linha $\ell_1 = (1, 2, 3)$, $\ell_2 = (2, 1, 1)$ e $\ell_3 = (3, -1, 2)$ são linearmente independentes. Com efeito, olhando para as duas primeiras coordenadas, vemos que $(3, -1) = \alpha \cdot (1, 2) + \beta \cdot (2, 1)$, com $\alpha = -5/3$ e $\beta = 7/3$. Logo, só poderíamos ter $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ se $\alpha$ e $\beta$ tivessem esses valores. Mas, examinando as terceiras coordenadas, vemos que $2 \neq -\frac{5}{3} \cdot 3 + \frac{7}{3} \cdot 1$. Portanto $\ell_3$ não é combinação linear de $\ell_1$ e $\ell_2$. Como $\ell_1$ e $\ell_2$ não são múltiplos um do outro, conclui-se que, de fato, $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$ são linearmente independentes. Portanto o sistema possui uma única solução.

## 4. Escalonamento (eliminação gaussiana)

Na seção anterior foi feita, com detalhes, uma análise qualitativa dos sistemas lineares de três equações a três incógnitas, com ênfase na interpretação geométrica, mostrando-se ainda as condições algébricas que correspondem às diversas situações relativas de três planos no espaço.

Na presente seção, olharemos para o mesmo problema sob o ponto de vista algorítmico, isto é, mediante um processo que nos

conduzirá, passo a passo, não apenas à resposta para a questão da existência de soluções, como também à determinação explícita de tais soluções, quando existirem.

O método mais simples e eficiente para resolver sistemas é o do escalonamento, ou eliminação gaussiana. Ele é elementar, consagrado por seu uso secular e, ao mesmo tempo, atual.

A apresentação que se segue é tirada da Seção 13 do livro “Coordenadas no Espaço”.

O escalonamento é um processo extremamente eficiente para resolver o sistema linear

$$(*)\qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3\,. \end{aligned}$$

Ele opera sobre as matrizes abaixo, que são a *matriz* e a *matriz aumentada* do sistema (*):

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Diz-se que uma matriz é *escalonada* quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma das suas linhas situa-se à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte. Além disso, as linhas que tiverem todos os seus elementos iguais a zero devem estar abaixo das demais.

**Exemplo 1.** As matrizes abaixo são escalonadas:

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad m' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um *sistema escalonado* (isto é, um cuja matriz é escalonada) pode ser facilmente resolvido de baixo para cima, obtendo-se primeiro o valor da última incógnita, substituindo-a por esse valor na equação anterior, e assim por diante.

**Exemplo 2.** Consideremos os sistemas

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + 4z &= 2 \\ 2z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + y + 5z &= 20 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ y + 5z &= -1 \\ 0x + 0y + 0z &= 1 \end{aligned}$$

As matrizes dos dois primeiros são $m$ e $m'$ do Exemplo 1. A matriz aumentada do terceiro é $M$, também do Exemplo 1.

No primeiro sistema temos $z = 1$. Substituindo na segunda equação, resulta $y = -2$. Novamente substituindo $z$ por 1 e $y$ por $-2$ na primeira equação vem $x = 3$. Portanto $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$ é a solução do primeiro sistema. Quanto ao segundo sistema, tem-se $z = 3$. Entrando com este valor na segunda equação resulta $3x + y = 5$. Portanto, as soluções do segundo sistema são os pontos $(x, 5-3x, 3)$ em $\mathbb{R}^3$, onde $x$ pode assumir qualquer valor real. Estas soluções formam a reta $y = -3x + 5$ no plano $z = 3$. Finalmente, é claro que o terceiro sistema não admite solução (é impossível) pois não existem números $x$, $y$, $z$ tais que $0x + 0y + 0z = 1$. Este exemplo foi incluído aqui porque no processo de escalonamento, que descreveremos a seguir, pode-se chegar a uma matriz aumentada em cuja última linha (ou em cujas duas últimas linhas) os três primeiros elementos sejam iguais a zero porém o quarto seja diferente de zero.

O método do escalonamento se baseia no fato de que todo sistema é equivalente a um sistema escalonado.

Partindo do sistema (*), chega-se a um sistema escalonado equivalente por meio de uma seqüência de operações elementares, que são as seguintes:

1) Trocar a ordem das equações do sistema;
2) Substituir numa equação do sistema por sua soma com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema.

Se $L_1$, $L_2$, $L_3$ são as linhas da matriz aumentada do sistema (*), a operação elementar (1) significa considerar um novo sistema cuja matriz aumentada tem linhas $L_2$, $L_1$, $L_3$ ou $L_1$, $L_3$, $L_2$ etc.

Evidentemente o novo sistema é equivalente ao primeiro.

Quanto à segunda operação elementar, ela significa considerar o sistema (**) cuja matriz aumentada tem linhas $L_1$, $L_2$, $L_3 + \alpha \cdot L_1$, por exemplo.

Ora, as soluções dos sistemas abaixo são as mesmas:

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3\,. \end{aligned}$$

$$(**) \qquad \begin{aligned} &a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ &a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ &(\alpha_3 + \alpha a_1)x + (b_3 + \alpha b_1)y + (c_3 + \alpha c_1)z = d_3 + \alpha d_1\,. \end{aligned}$$

Com efeito, se $(x, y, z)$ satisfaz o sistema (*) então satisfaz as duas primeiras equações de (**). Multiplicando a primeira equação de (*) por $\alpha$ e somando-a com a terceira, vemos que $(x, y, z)$ também satisfaz a terceira equação de (**).

Reciprocamente, se $(x, y, z)$ é solução de (**) então satisfaz às duas primeiras equações de (*). Multiplicando a primeira equação de (**) por $\alpha$ e subtraindo-a da terceira, vemos que $(x, y, z)$ satisfaz a última equação de (*), logo é solução de (*).

Portanto, submetendo um sistema a uma série de operações elementares, obtém-se um sistema equivalente.

Mostraremos agora como proceder de modo que as sucessivas operações elementares conduzam a um sistema escalonado.

Em primeiro lugar, trocando a ordem das equações se necessário, podemos supor que $a_1 \neq 0$. (Se fosse $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, teríamos um sistema com duas incógnitas, assunto já tratado antes.)

(1) O início do processo realmente consiste em somar à segunda equação a primeira multiplicada por $-a_2/a_1$ e somar à terceira equação a primeira multiplicada por $-a_3/a_1$. Isto conduz a

um sistema equivalente, da forma

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2 \\ b_3'y + c_3'z &= d_3\,. \end{aligned}$$

(2) Em seguida, supondo que um dos números $b_2'$, $b_3'$ seja $\neq 0$ podemos admitir (trocando a ordem das duas últimas equações, se necessário) que $b_2' \neq 0$. Então substituímos a terceira equação por sua soma com a segunda multiplicda por $-b_3'/b_2'$. Isto elimina o termo em $y$ da terceira equação e o sistema anterior é, portanto, equivalente a um sistema escalonado, do tipo

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2' \\ c_3''z &= d_3''\,. \end{aligned}$$

Voltemos à etapa (2). Se acontecer que, após a etapa (1) se tem $b_2' = b_3' = 0$, o sistema reduz-se a

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y+c_1z &= d_1 \\ c_2'z &= d_2' \\ c_3'z &= d_3'\,. \end{aligned}$$

As duas últimas equações podem simplesmente não existir (se $c_2' = d_2' = c_3' = d_3' = 0$), podem determinar um único valor de $z$ (se $d_2'/c_2' = d_3'/c_3'$ ou se $c_3' = d_3' = 0$ mas $c_2' \neq 0$) ou podem ser incompatíveis (se $d_2'/c_2' \neq d_3'/c_3'$ ou se um dos c's é zero mas o d correspondente é $\neq 0$). Se as equações em $z$ não existem, então resta a primeira, que define um plano. Se um só valor de $z$ é determinado por essas duas últimas equações então as soluções do sistema formam uma reta, situada num plano horizontal. Se as duas equações finais são incompatíveis então o sistema não tem solução.

Finalmente, se na etapa (2) tivermos $c_3'' = 0$, o sistema será impossível (sem solução) caso $d_3'' \neq 0$. Se $c_3'' = d_3'' = 0$, o sistema

será indeterminado (infinitas soluções). O conjunto das soluções é uma reta pois suas duas linhas não podem ser uma múltiplo da outra.

**Exemplo 3.** Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y - z &= 13. \end{aligned}$$

Multiplicamos a primeira equação por $-2$ e por $-4$ sucessivamente e a somamos à segunda e à terceira respectivamente. Estas operações conduzem ao sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -y + 10z &= -3 \\ -y + 11z &= -3. \end{aligned}$$

Em seguida, multiplicamos a segunda equação por $-1$ e a somamos à terceira, obtendo o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -y + 10z &= -3 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Imediatamente vem $z = 0$, $y = 3$ e $x = -2$, valores que se obtêm substituindo o valor de $z$ na segunda equação, o que fornece $y$ e, em seguida, substituindo os valores encontrados de $y$ e $z$ na primeira equação a fim de obter $x$.

Evidentemente, ao aplicarmos as operações elementares para chegar a um sistema escalonado, as incógnitas $x$, $y$, $z$ e os sinais $+$, $-$ e $=$ não desempenham papel algum. Ganha-se em simplicidade e concisão dispensando-os, ou seja, efetuando as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada, retornando às equações apenas no final, quando a matriz (não aumentada) estiver escalonada. Faremos assim no exemplo seguinte.

**Exemplo 4.** Consideremos o sistema abaixo e sua matriz aumentada:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y - 2z &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

Subtraímos da segunda linha o dobro da primeira e, da terceira, quatro vezes a primeira. Se as linhas desta matriz são $L_1$, $L_2$ e $L_3$, a matriz seguinte terá linhas $L_1, L_2 - 1 \cdot L_1$ e $L_3 - 4 \cdot L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

Substituindo a terceira linha pela diferença entre ela e a segunda, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a qual é a matriz aumentada do sistema escalonado

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ y - 10z &= 3 \\ 0 \cdot z &= -1 \end{aligned}$$

Evidentemente, este sistema não possui solução. Como ele é equivalente ao sistema original, concluímos novamente que aquele sistema é impossível.

**Exemplo 5.** Usando mais uma vez a matriz aumentada, sobre cujas linhas aplicamos as operações elementares, consideramos o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y - 2z &= 13. \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2-2\cdot L_1]{L_3-4\cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2-L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A notação $L_2 - 2 \cdot L_1$ significa que a segunda linha está sendo substituida pela diferença entre ela e o dobro da primeira. As notações $L_3 - 4 \cdot L_1$ e $L_2 - L_3$ têm significados análogos.

Fomos então conduzidos à matriz aumentada do sistema escalonado

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -y + 10z &= -3. \end{aligned}$$

Da última equação obtemos $y = 10z + 3$. Entrando com este valor na primeira equação, obtemos $x = -2 - 17z$. Vemos então que as soluções do sistema proposto são os pontos $(-2 - 17z, 10z + 3z)$, onde $z$ pode ser escolhido livremente. Estes pontos formam a reta de equações paramétricas $x = -17t - 2$, $y = 10t + 3$, $z = t$.

**Exemplo 6.** Aplicando o processo de escalonamento ao sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x - 4y + 6z &= 5 \\ 2x - 6y + 9z &= 12 \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-4\cdot L_1]{L_2-2\cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Chegamos à matriz do sistema escalonado

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2y - 3z &= -4 \\ 0 \cdot z &= -3 \end{aligned}$$

Evidentemente, este sistema não possui solução, logo o sistema original, que lhe é equivalente, também não possui.

**Observação.** (Sistemas de quatro equações com três incógnitas.) Consideremos o sistema

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4 . \end{aligned}$$

A eliminação gaussiana mostra que ele é equivalente ao sistema escalonado

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ B_2y + C_2z &= D_2 \\ C_3z &= D_3 \\ 0 &= D_4 . \end{aligned}$$

Portanto, a fim de que o sistema (*) possua solução, é necessário que se tenha $D_4 = 0$. Isto equivale a dizer que para o sistema (*) possuir solução é necessário que a linha $L_4 = (a_4, b_4, c_4, d_4)$ seja combinação linear das três linhas anteriores. Uma vez cumprida esta condição, existe solução para (*) se, e somente se, existe solução para o sistema formado pelas 3 primeiras equações. Mais precisamente, as soluções do sistema (*) são as mesmas soluções do sistema menor, caso existam.

# Exercícios

1) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 5732x + 2134y + 2134z &= 7866 \\ 2134x + 5732y + 2134z &= 670 \\ 2134x + 2134y + 5732z &= 11464 \end{aligned}$$

2) Em uma corrida de d metros os atletas A, B e C competiram aos pares. A venceu B com 20m de frente; B venceu C com 10m de frente e A venceu C com 28m de frente. Qual é o valor de d?

3) Um par de tênis, duas bermudas e três camisetas custam juntos R$ 100,00. Dois pares de tênis, cinco bermudas e 8 camisetas custam juntos R$ 235,00.

Quanto custam juntos um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta?

4) Dos pontos $(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem simultaneamente as equações $x + 2y - z = 2$ e $2x - y + z = 4$, qual deles é o mais próximo do ponto $P = (4, -1, 1)$?

5) Mostre que as soluções do sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

são os ternos $(x, y, z)$ onde:

$$\begin{aligned} x &= (bc' - cb')t, \\ y &= (ca' - ac')t, \\ z &= (ab' - ba')t. \end{aligned}$$

6) Resolva o sistema:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z + 7w &= 12 \\ 3x + 5y + 7z + w &= 0 \\ 5x + 7y + z + 3w &= 4 \\ 7x + y + 3z + 5w &= 16 \end{aligned}$$

Na sua opinião, a Regra de Cramer é um método prático para resolver este sistema?

7) Determine para que valores de $m$ e $n$ o sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 4 \\ 3x + y + mz &= n \end{aligned}$$

seja:

a) indeterminado

b) impossível.

8) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $f(x, y) = (2x+y, x-y)$. Sabe-se que a equação $f(x, y) = \lambda(x, y)$ possui solução $(x, y) \neq (0, 0)$. Calcule $\lambda$.

9) Obtenha as soluções dos seguintes sistemas de equações lineares:

a) $$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ y + z &= 4 \\ x + y &= 5 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + 7z &= 1 \\ x - y + 6z &= 1{,}5 \\ 2y + 6z &= 2 \\ 4x - 3y + 12z &= 5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x - 2y + z + t &= 1 \\ 2x + y - 2z + 2t &= 0 \\ x + 6y &= -2 \end{aligned}$$

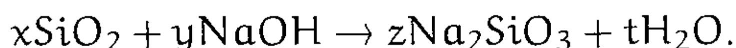
10) Bronze é uma liga de cobre e zinco, na qual a porcentagem de cobre varia geralmente entre 60% e 70%. Usando dois tipos de bronze, um com 62% e outro com 70% de cobre, deseja-se obter uma tonelada de bronze com exatamente 65% de cobre.

Quantos quilos do primeiro tipo de bronze e quantos quilos do segundo devem ser usados?

11) Aço fino é uma liga de ferro, cromo e níquel. Um exemplo é o aço V2A, que contém 74% de ferro, 18% de cromo e 8% de níquel. Na tabela abaixo, têm-se ligas I, II, III e IV, as quais devemos misturar para obter uma tonelada de aço V2A. Quantos quilos de cada uma dessas ligas devemos tomar?

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Ferro | 70% | 72% | 80% | 85% |
| Cromo | 22% | 20% | 10% | 12% |
| Níquel | 8% | 8% | 10% | 3% |

12) Combinando quartzo ($SiO_2$) com lixívia de sódio ($NaOH$) obtém-se silicato de sódio ($NA_2SiO_3$) e água ($H_2O$), na reação química indicada por



$$x SiO_2 + y NaOH \to z Na_2SiO_3 + t H_2O.$$

Os números naturais $x$, $y$, $z$ e $t$ devem ser tais que os elementos químicos $Si$, $O$, $Na$ e $H$ ocorram em iguais quantidades em ambos os lados da reação. Como podem esses números ser tomados de modo a se ter a "menor" reação química possivel?

13) Responda a questão análoga à anterior com respeito à reação



$$x Fe + y O_2 \to z Fe_2O_3 + t SO_2$$

(geração de dióxido de enxofre a partir de pirita).

14) A tabela abaixo exibe as porcentagens de albumina, carbohidrato e lipídio em cada um dos alimentos A, B e C. Mostre que não é possível combinar esses alimentos formando uma refeição que contenha 47% de albumina, 35% de carbohidrato e 18% de lipídio. Investigue se seria possível caso as

exigências fossem 40% de albumina, 40% de carbohidrato e 20% de lipídio.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Albumina | 30% | 50% | 20% |
| Carbohidrato | 30% | 30% | 70% |
| Lipídio | 40% | 20% | 10% |

15) Mostre que os vetores $v_1, v_2, v_3$ são linearmente independentes se, e somente se, $v_3$ não é combinação linear de $v_1$ e $v_2$, $v_2$ não é múltiplo de $v_1$ e $v_1$ é $\neq 0$.

16) Dados os pontos A, B, C e D no espaço, sejam $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AD}$. Prove que os vetores $u, v$ e $w$ são linearmente independentes se, e somente se, os quatro pontos dados não são coplanares.

# Capítulo 4

# Matrizes e Determinantes

## 1. Introdução

A idéia geral de matriz do tipo $m \times n$ é a de um quadro retangular com $mn$ elementos, dispostos em $m$ linhas e $n$ colunas. Na grande maioria das vezes, esses elementos são números. Matrizes são freqüentemente utilizadas para organizar dados. Por exemplo, as notas finais dos alunos de uma série no colégio podem formar uma matriz cujas colunas correspondem às matérias lecionadas naquela série e cujas linhas representam os alunos. Na interseção de uma linha com uma coluna figura um número, que é a nota daquele aluno naquela matéria.

Na Matemática do Ensino Médio, as matrizes ocorrem principalmente como quadros dos coeficientes de sistemas de equações lineares. Elas também surgem em situações como as seguintes: os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ podem formar as linhas de uma matriz $2 \times 3$ ou as colunas de uma matriz $3 \times 2$.

Na definição que adotaremos, uma matriz $m \times n$ é uma lista de números $a_{ij}$, com índices duplos, onde $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$. A matriz $\mathbf{m}$ é representada por um quadro numérico com $m$ linhas e $n$ colunas, no qual o elemento $a_{ij}$ situa-se no cruzamento de $i$-ésima linha com a $j$-ésima coluna:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ chama-se a *i-ésima linha* ou o *i-ésimo vetor-linha* da matriz $m$ enquanto $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ é a *j-ésima coluna* ou o *j-ésimo vetor-coluna* de $m$.

Numa extensão natural dos casos em que $k \leqslant 4$, que já vimos antes, a notação $\mathbb{R}^k$ indica o *espaço euclidiano* (numérico *k-dimensional*), cujos elementos são as listas ordenadas $v = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de $k$ números reais. Assim, as linhas de uma matriz $m \times n$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ e as colunas pertencem a $\mathbb{R}^m$.

Na matriz $m$, o elemento $a_{ij}$ chama-se o $ij$-ésimo elemento de $m$; escreve-se $m = [a_{ij}]$.

Diz-se que a matriz $m$ é *quadrada* quando tem o mesmo número de linhas e colunas.

A soma de duas matrizes do mesmo tipo $m \times n$ e o produto de uma matriz por um número são definidos elemento a elemento, imitando as operações análogas com vetores: se $\mathbf{m} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{n} = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$ então $\mathbf{m} + \mathbf{n} = [a_{ij} + b_{ij}]$ e $\alpha \cdot \mathbf{m} = [\alpha a_{ij}]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Estas operações têm as mesmas propriedades das operações de mesmo nome entre vetores, desde que estabeleçamos as convenções naturais de que a matriz nula $0$ do tipo $m \times n$ é aquela cujos elementos são todos iguais a zero e que se $\mathbf{m} = [a_{ij}]$ então $-\mathbf{m} = [-a_{ij}]$.

A grande novidade operacional entre matrizes é a multiplicação, sobre a qual falaremos na próxima seção.

## 2. Multiplicação de matrizes

Em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares. Num estudo elementar, a nível do Ensino Médio, convém motivar a multiplicações de matrizes mediante exemplos mais simples. Um deles é o seguinte.

Uma empresa, que possui duas confeitarias, chamadas A e B, fabrica três tipos de bolo: 1, 2 e 3, os quais são feitos de farinha, açúcar, leite, manteiga e ovos. Em cada semana, as vendas dessas

duas confeitarias são estimadas conforme a matriz de m de venda semanal abaixo:

| Confeitaria | Bolo tipo 1 | Bolo tipo 2 | Bolo tipo 3 |
|---|---|---|---|
| A | 50 unidades | 30 unidades | 25 unidades |
| B | 20 unidades | 20 unidades | 40 unidades |

Para a fabricação desses bolos, o material é usado de acordo com a matriz n seguinte:

| Bolo | farinha | açúcar | leite | manteiga | ovos |
|---|---|---|---|---|---|
| tipo 1 | 500 g | 200 g | 500 ml | 150 g | 4 |
| tipo 2 | 400 g | 100 g | 300 ml | 250 g | 5 |
| tipo 3 | 450 g | 150 g | 600 ml | 0 | 6 |

A direção da empresa, a fim de atender à demanda, quer saber a quantidade de cada uma das cinco matérias primas que deve alocar às suas duas confeitarias. A resposta deve ser uma matriz p, do tipo $2 \times 5$, onde as linhas representam as duas confeitarias e as colunas correspondem aos cinco materiais usados.

| Confeitaria | farinha | açúcar | leite | manteira | ovos |
|---|---|---|---|---|---|
| A | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{14}$ | $c_{15}$ |
| B | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $c_{23}$ | $c_{24}$ | $c_{25}$ |

Assim, $c_{ij}$ é quanto a i-ésima confeitaria deve estocar do j-ésimo material a fim de executar as vendas previstas.

Se escrevermos $m = [a_{ij}]$; $1 \leqslant i \leqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant 3$ e $n = [b_{ij}]$, com $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 5$, veremos facilmente que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (1 \leqslant i \leqslant 2, \ 1 \leqslant j \leqslant 5).$$

Assim, por exemplo, o número de ovos necessários para a con-

feitaria A é

$$\begin{aligned} c_{15} &= a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35} = \\ &= 50 \times 4 + 30 \times 5 + 25 \times 6 = 500. \end{aligned}$$

Isto sugere a seguinte definição geral.

Sejam $\mathbf{m} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{n} = [b_{ij}]$ matrizes de tipo $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente. O *produto* dessas matrizes é a matriz $\mathbf{mn} = [c_{ij}]$, de tipo $m \times p$, cujo $ij$-ésimo elemento é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Estendendo a noção análoga que já vimos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, chama-se *produto interno* de dois vetores

$$v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{e} \quad w = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

em $\mathbb{R}^n$ do número

$$\langle v, w \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Assim o $ij$-ésimo elemento da matriz produto $\mathbf{mn}$ é o produto interno do $i$-ésimo vetor-linha da matriz $\mathbf{m}$ pelo $j$-ésimo vetor-coluna da matriz $\mathbf{n}$.

Quando lidarmos com matrizes que têm um número pequeno de colunas (digamos $\leqslant 4$), escreveremos a $i$-ésima linha na forma $(a_i, b_i, c_i, d_i)$ em vez de $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$. Com esta notação, o produto de duas matrizes $3 \times 3$,

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}$$

é a matriz $\mathbf{mn}$ abaixo especificada:

$$\mathbf{mn} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3 & a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 & a_1t_1 + b_1t_2 + c_1t_3 \\ a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3 & a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 & a_2t_1 + b_2t_2 + c_2t_3 \\ a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3 & a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 & a_3t_1 + b_3t_2 + c_3t_3 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 26 \\ 15 & 47 & 62 \\ 24 & 74 & 98 \end{bmatrix}$$

A *matriz-identidade* $n \times n$ é a matriz $\mathbf{I}_n = [\delta_{ij}]$ cujos elementos são $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$. Assim

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $\mathbf{m} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{m}$ e $\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}$ sempre que esses produtos estiverem bem definidos, isto é, o número de linhas do primeiro fator for igual ao número de colunas do segundo.

O produto de matrizes é associativo: $(\mathbf{mn})\mathbf{p} = \mathbf{m}(\mathbf{np})$ e distributivo: $(\mathbf{m}+\mathbf{n})\mathbf{p} = \mathbf{mp}+\mathbf{np}$, $\mathbf{m}(\mathbf{n}+\mathbf{p}) = \mathbf{mn}+\mathbf{mp}$. Mas há quatro diferenças fundamentais entre o produto de matrizes e o produto de números.

A primeira é que o produto $\mathbf{mn}$ não está definido para quaisquer matrizes $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$; pois só faz sentido quando o número de linhas de $\mathbf{m}$ é igual ao número de colunas de $\mathbf{n}$.

A segunda é que o produto $\mathbf{mn}$ não é comutativo. Mesmo que $\mathbf{mn}$ e $\mathbf{nm}$ existam, não se tem necessariamente $\mathbf{mn} = \mathbf{nm}$.

**Exemplo.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 41 & 49 & 57 \\ 52 & 62 & 73 \end{bmatrix}.$$

Compare este resultado com o exemplo anterior, em que as mesmas matrizes foram multiplicadas na ordem inversa.

A terceira diferença é que o produto de duas matrizes não-nulas pode ser a matriz nula: de $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ não se infere que $\mathbf{mn} \neq \mathbf{0}$. Pode até ocorrer que $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ seja tal que $\mathbf{m}^2 = \mathbf{0}$, como no exemplo abaixo.

**Exemplo.** Se

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

então $m^2 = 0$.

A quarta diferença entre o produto de matrizes e o produto de números é que todo número $a$ diferente de zero possui o inverso multiplicativo $a^{-1}$ pois $aa^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Por outro lado, dada a matriz quadrada $m$, do tipo $n \times n$, nem sempre existe uma matriz $p$, do tipo $n \times n$, tal que $mp = pm = I_n$. Quando uma tal matriz $p$ existe, a matriz $m$ se diz *invertível* e $p$ chama-se a *matriz inversa* de $m$. Escreve-se então $p = m^{-1}$.

**Exemplo.** Dada uma matriz $m$ de tipo $n \times n$ tal que $m^2 = 0$ (vide Exemplo anterior), não pode existir uma matriz $p$ tal que $mp = pm = I_n$. Com efeito, se uma tal $p$ existisse teríamos

$$I_n = I_n \cdot I_n = pm \cdot mp = p \cdot (m)^2 \cdot p = p \cdot 0 \cdot p = 0,$$

um absurdo. Por outro lado, se

$$m = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} -1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & -1/9 \end{bmatrix}$$

é a inversa de $m$.

Um sistema de equações lineares como

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3y &= d_3 \end{aligned}$$

pode ser interpretado, em termos matriciais, do seguinte modo: consideramos as matrizes

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

de tipo $3 \times 3$, $3 \times 1$ e $3 \times 1$ respectivamente. Então o sistema (*) se escreve como

$$\mathbf{mx} = \mathbf{d}.$$

Se a matriz $\mathbf{m}$ possuir uma inversa $\mathbf{m}^{-1}$, o conhecimento de $\mathbf{m}^{-1}$ permite resolver o sistema multiplicando ambos os membros da igualdade acima, à esquerda, por $\mathbf{m}^{-1}$, o que nos dá a elegante resposta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{d}.$$

Acontece, porém, que o problema de determinar a matriz inversa $\mathbf{m}^{-1}$ (mesmo quando se sabe que ela existe) é muito mais trabalhoso do que resolver diretamente o sistema (*) por escalonamento. Por isso, embora a matriz inversa $\mathbf{m}^{-1}$ seja um objeto teoricamente muito interessante, ao contrário do que às vezes se diz, não é o instrumento mais eficaz para resolver um sistema de equações lineares.

**Observação.** A definição da matriz inversa $\mathbf{m}^{-1}$ exige que

$$\mathbf{mm}^{-1} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{m} = \mathbf{I}_3.$$

mas a solução do sistema $\mathbf{mx} = \mathbf{d}$ acima obtida usa apenas o fato de que $\mathbf{m}^{-1}\mathbf{m} = \mathbf{I}_3$. Isto sugere naturalmente a pergunta: dada a matriz $\mathbf{m}$, do tipo $n \times n$, suponha que exista uma matriz $\mathbf{p}$, ainda do tipo $n \times n$, tal que $\mathbf{pm} = \mathbf{I}_n$. Tem-se então necessariamente $\mathbf{mp} = \mathbf{I}_n$? A resposta é afirmativa e será justificada na seção 6, adiante.

## 3. Determinantes

Já definimos o determinante de uma matriz $2 \times 2$. Se

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

pusemos $\det m = a_1b_2 - a_2b_1$.

Faremos agora o estudo do determinante de uma matriz $3 \times 3$. O caso geral, de uma matriz $n \times n$, pode ser tratado de modo análogo, com uma notação mais complicada.

O *determinante* da matriz

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

é o número

$$\Delta = \det m = a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 + a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2.$$

Ele é a soma de $6 = 3!$ parcelas, cada uma das quais é um produto de três fatores, pertencendo esses 3 fatores a linhas e a colunas diferentes. Assim, cada uma das seis parcelas é um produto do tipo $abc$, com os índices 1, 2, 3 aparecendo, cada um uma vez, em todas essas parcelas. A ordem em que esses índices aparecem é relevante. Ela corresponde às permutações de 1, 2, 3. As permutações 123, 312 e 231 aparecem nas parcelas precedidas do sinal + enquanto as permutações 213, 321 e 132 corespondem às parcelas precedidas do sinal −. As três primeiras são chamadas as *permutações pares*. Elas são obtidas quando se tomam três números consecutivos quaisquer na seqüência

$$123123123123\ldots$$

As outras são as *permutações ímpares*, que se obtêm trocando as posições de 2 elementos numa permutação par ou então escolhendo três números consecutivos quaisquer na seqüência

$$321321321321\ldots$$

Sejam $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w = (a_3, b_3, c_3)$ os três vetores de $\mathbb{R}^3$ que correspondem às três linhas da matriz $m$ acima. Para enfatizar a dependência do determinante de $m$ em relação a esses vetores, escreveremos

$$\det m = \det[u, v, w].$$

A seguir, faremos uma lista das propriedades básicas do determinante.

**1.** O determinante muda de sinal quando se trocam as posições de duas quaisquer de suas linhas. Assim, tem-se

$$\det[v, u, w] = -\det[u, v, w],$$

$$\det[w, v, u] = -\det[u, v, w] \text{ e } \det[u, w, v] = -\det[u, v, w].$$

**2.** Se uma matriz tem duas linhas iguais, seu determinante é igual a zero. Assim, $\det[u, u, w] = \det[u, v, u] = \det[u, v, v] = 0$.

**3.** Se multiplicarmos uma linha da matriz por um número, o determinante fica multiplicado por aquele número. Assim $\det[\alpha \cdot u, v, w] = \det[u, \alpha \cdot v, w] = \det[u, v, \alpha \cdot w] = \alpha \det[u, v, w]$.

**4.** Se uma linha da matriz é soma de duas parcelas (vetoriais) seu determinante é soma de dois outros, em cada um dos quais aquela linha é substituída por uma das parcelas. Assim, $\det[u+u', v, w] = \det[u, v, w] + \det[u', v, w]$.

**5.** Se uma linha da matriz é combinação linear das outras duas, o determinante dessa matriz é zero. Assim, $\det[\alpha \cdot v + \beta \cdot w, v, w] = \det[u, \alpha \cdot u + \beta \cdot w, w] = \det[u, v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v] = 0$.

**6.** Tem-se $\det[u, v, w] = 0$ se, e somente se, os vetores $u$, $v$, $w$ são linearmente dependentes, isto é, um deles é combinação linear dos demais.

**7.** O determinante não se altera se substituirmos uma de suas linhas pela soma dela com um múltiplo de outra. Assim, por exemplo, $\det[u + \alpha \cdot v, v, w] = \det[u, v, w]$.

**8.** O determinante não se altera quando se trocam as linhas pelas colunas e vice-versa.

Podemos reformular a última propriedade acima do seguinte modo. As matrizes

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad m^{\top} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

são tais que as linhas da segunda coincidem com as colunas da primeira, na mesma ordem. Diz-se então que $m^{\top}$ é a *transposta* da matriz $m$. A propriedade 8 significa que as matrizes $m$ e $m^{\top}$ têm o mesmo determinante.

Passemos agora às demonstrações dessas oito propriedades. Parece uma tarefa pesada mas, na realidade, são bastante simples. (Excetua-se a parte "somente se" da propriedade 6, que será provada na seção 5, adiante.)

**1.** Para mostrar que $\det[v, u, w] = -\det[u, v, w]$ basta observar que, para passar da expressão de $\Delta = \det[u, v, w]$ para a expressão de $\det[v, u, w]$, basta trocar, em cada parcela, os índices 1 e 2. Ora, invertendo as posições de 1 e 2 (deixando 3 fixo) faz com que cada permutação par se torne ímpar e vice-versa. Portanto, passa-se de $\det[u, v, w]$ para $\det[v, u, w]$ trocando o sinal de cada parcela. Então $\det[v, u, w] = -\det[u, v, w]$. Mesmo argumento para as outras duas inversões.

**2.** Se uma matriz tem duas linhas iguais então, trocando-se as posições dessas duas linhas, seu determinante deveria mudar de sinal, pela Propriedade 1. Entretanto, como a matriz não mudou com essa troca, seu determinante também não muda. Portanto $\det[u, u, v] = -\det[u, u, v]$ e daí $\det[u, u, v] = 0$.

**3.** Isto é imediato pois cada parcela de $\det[u, v, w]$ contém exatamente um fator de cada linha.

**4.** Sejam $u = (a_1, b_1, c_1)$, $u' = (a_1', b_1', c_1')$ e $u + u' = (a_1 + a_1', b_1 + b_1', c_1 + c_1')$. As parcelas de $\det[u+u', v, w]$ são do tipo $(a_i + a_i')b_j c_k =$

$a_i b_j c_k + a'_i b_j c_k$, ou $a_i(b_j + b'_j)c_k = a_i b_j c_k + a_i b'_j c_k$ ou então $a_i b_j (c_k + c'_k) = a_i b_j c_k + a_i b_j c'_k$. Segue-se daí que

$$\det[u + u', v, w] = \det[u, v, w] + \det[u', v, w].$$

**5.** Em virtude das propriedades 4, 3 e 2 temos:

$$\begin{aligned}\det[\alpha \cdot v + \beta \cdot w, v, w] &= \det[\alpha \cdot v, v, w] + \det[\beta \cdot w, v, w] = \\ &= \alpha \det[v, v, w] + \beta \det[w, v, w] = \\ &= \alpha 0 + \beta 0 = 0.\end{aligned}$$

**6.** Pela propriedade 5, se $u$, $v$, $w$ são linearmente dependentes então $\det[u, v, w] = 0$. Por outro lado, se $u$, $v$, $w$ forem linearmente independentes e pusermos $u = \overrightarrow{OA}$, $v = \overrightarrow{OB}$ e $w = \overrightarrow{OC}$, então, conforme veremos na seção 5 a seguir, $|\det[u, v, w]|$ será o volume do paralelepípedo que tem OA, OB e OC como arestas. Logo, $\det[u, v, w] \neq 0$.

Segue-se imediatamente da propriedade 6 que o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$

possui uma única solução $(x, y, z)$ se, e somente se, a matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

tem determinante diferente de zero. Como se vê, esta condição não depende dos números $d_1$, $d_2$, $d_3$ que aparecem nos segundo membros das equações.

**7.** Pelas propriedades 4, 3 e 2 podemos escrever:

$$\begin{aligned}\det[u + \alpha \cdot v, v, w] &= \det[u, v, w] + \det[\alpha \cdot v, v, w] = \\ &= \det[u, v, w] + \alpha \det[v, v, w] = \det[u, v, w].\end{aligned}$$

**8.** A matriz transposta $m^\top$ tem as linhas $(A_1, B_1, C_1)$, $(A_2, B_2, C_2)$ e $(A_3, B_3, C_3)$, onde $A_1 = a_1$, $B_1 = a_2$, $C_1 = a_3$, $A_2 = b_1$, $B_2 = b_2$, $C_2 = b_3$, $A_3 = c_1$, $B_3 = c_2$ e $C_3 = c_3$. Escrevendo a expressão de $\det m^\top$ de acordo com a definição dada obtemos

$$\begin{aligned}\det m^\top &= a_1b_2c_3 - b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 + b_1c_2a_3 - a_1c_2b_3\\ &= a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2\\ &= \det m.\end{aligned}$$

Resulta imediatamente da propriedade 8 que as afirmações feitas nas sete propriedades anteriores a respeito das linhas da matriz $m$ valem também para colunas. Por exemplo, o determinante muda de sinal quando se invertem as posições de duas de suas colunas. Ou então: um determinante é nulo quando suas colunas são linearmente dependentes (em partiuclar, quando duas de suas colunas são iguais).

Para enunciar a próxima propriedade dos determinantes vamos precisar de uma definição.

Sejam $m$ uma matriz $3 \times 3$ e $p$ um elemento de $m$. Omitindo-se de $m$ a linha e a coluna que se cruzam em $p$, obtém-se uma matriz $2 \times 2$, cujo determinante $P$ se chama o *menor* relativo ao elemento $p$.

Assim os menores da matriz

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

são

$$\begin{aligned}A_1 &= b_2c_3 - b_3c_2 = \text{ menor de } a_1,\\ A_2 &= b_1c_3 - b_3c_1 = \text{ menor de } a_2,\\ A_3 &= b_1c_2 - b_2c_1 = \text{ menor de } a_3,\\ B_1 &= a_2c_3 - a_3c_2 = \text{ menor de } b_1,\\ B_2 &= a_1c_3 - a_3c_1 = \text{ menor de } b_2,\\ B_3 &= a_1c_2 - a_2c_1 = \text{ menor de } b_3,\end{aligned}$$

$$C_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = \text{menor de } c_1\,,$$
$$C_2 = a_1b_3 - a_3b_1 = \text{menor de } c_2\,,$$
$$C_3 = a_1b_2 - a_2b_1 = \text{menor de } c_3\,.$$

**9.** Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha:

$$\det \mathbf{m} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = -a_2A_2 + b_2B_2 - c_2C_2 =$$
$$= a_3B_3 - b_3B_3 + c_3C_3\,.$$

A expressão $a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$ é o desenvolvimento de $\det \mathbf{m}$ segundo os elementos da primeira linha. As duas expressões seguintes chamam-se os desenvolvimentos de $\det \mathbf{m}$ segundo os elementos da segunda e da terceira linha respectivamente. O sinal que precede o produto $pP$ do elemento $p$ pelo seu menor $P$ é $+$ ou $-$ conforme se tenha $i + j$ par ou ímpar, onde $p$ está na interseção da $i$-ésima linha com a $j$-ésima coluna. Assim, por exemplo, no desenvolvimento de $\det \mathbf{m}$ segundo os elementos da segunda linha, o produto $a_2A_2$ vem precedido do sinal $-$ porque $a_2$ está no cruzamento da segunda linha com a primeira coluna $(i = 2, j = 1)$ e $2 + 1 = 3$ é ímpar.

A demonstração das fórmulas acima é imediata: basta pôr em evidência, por exemplo, $a_1$, $b_1$ e $c_1$ nas parcelas em que eles aparecem na definição de $\det \mathbf{m}$. Isto nos dá $\det \mathbf{m} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$. As demais fórmulas são análogas.

Evidentemente, vale também a propriedade:

**10.** Desenvolvimento segundo os elementos de uma coluna:

$$\det \mathbf{m} = a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3 = -b_1B_1 + b_2B_2 - b_3B_3 =$$
$$= c_1C_1 - c_2C_2 + c_3C_3\,.$$

O cálculo de determinantes por meio do desenvolvimento segundo linhas ou colunas é às vezes bem útil, principalmente quando há uma linha ou coluna com um ou mais elementos iguais a zero.

**Exemplo.** Calculando o determinante por desenvolvimento segundo a primeira coluna, que contém um zero:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 0 & 7 & 8\end{bmatrix} = 1\cdot\det\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} - 4\cdot\det\begin{bmatrix}2 & 3\\ 7 & 8\end{bmatrix} = -2-4\cdot(-5) = 18.$$

## 4. A regra de Cramer

A regra de Cramer é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas de equações lineares. Ela apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes. Mas, por outro lado, possui dois inconvenientes em comparação com o método de escalonamento. O primeiro é que ela só se aplica quando o determinante da matriz do sistema é diferente de zero, ou seja, quando o sistema possui uma única solução. O segundo inconveniente é o custo operacional: dá bem mais trabalho calcular quatro determinantes do que escalonar uma única matriz $3\times 3$.

Consideremos portanto o sistema

$$(*)\qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1\\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2\\ a_3x + b_2y + c_3z &= d_3\,, \end{aligned}$$

no qual supomos que a matriz $m$ dos coeficientes tenha determinante diferente de zero. Como sabemos, esta hipótese equivale a admitir que as linhas de $m$ são linearmente independentes e portanto que o sistema (*) possui uma única solução. A regra de Cramer exprime essa solução por meio de determinantes.

Para deduzir a regra de Cramer, em vez de operar com as linhas da matriz, como vimos fazendo até agora, trabalharemos com os vetores-coluna:

$$a = (a_1, a_2, a_3),\ b = (b_1, b_2, b_3),\ c = (c_1, c_2, c_3) \text{ e } d = (d_1, d_2, d_3).$$

Em termos desses vetores, as 3 equações numéricas que con-

stituem o sistema (*) se exprimem como uma única equação vetorial. Mais precisamente, elas dizem que o vetor d é uma combinação linear dos vetores a, b e c:

$$x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c = d.$$

Daí resulta, pelas propriedades 4, 3 e 2, que:

$$\begin{aligned} \det[d, b, c] &= \det[x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c, b, c] = \\ &= x \det[a, b, c] + y \det[b, b, c] + z \det[c, b, c] = \\ &= x \det[a, b, c], \end{aligned}$$

portanto

$$x = \frac{\det[d, b, c]}{\det[a, b, c]}.$$

Analogamente, tem-se

$$\det[a, d, c] = y \det[a, b, c] \quad \text{e} \quad \det[a, b, d] = z \det[a, b, c],$$

logo

$$y = \frac{\det[a, d, c]}{\det[a, b, c]}, \quad z = \frac{\det[a, b, d]}{\det[a, b, c]}.$$

Estas três fórmulas, que fornecem os valores das incógnitas x, y, z em termos de determinantes, constituem a regra de Cramer.

**Observação 1.** A regra de Cramer só se aplica quando a matriz dos coeficientes do sistema tem determinante diferente de zero. Tentar utilizá-la fora desse caso pode conduzir a erros. Um desses erros é o seguinte: quando os 4 determinantes que aparecem na regra são todos iguais a zero, poder-se-ia pensar que ela fornece $x = 0/0$, $y = 0/0$, $z = 0/0$ e concluir que o sistema é indeterminado, isto é, possui infinitas soluções. Mas não é bem assim. Suponhamos, por exemplo, que os três vetores-coluna a, b, c sejam múltiplos um do outro mas que o vetor d não seja múltiplo deles. Então os 4 determinantes são nulos mas não existem números x, y, z tais que $x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c = d$, isto é, o sistema não tem solução.

**Exemplo 1.** Consideremos o sistema:

$$x + y + z = 1$$
$$2x + 2y + 2z = 2$$
$$3x + 3y + 3z = 4.$$

É claro que este sistema não tem solução pois se $x + y + z = 1$ então $3x + 3y + 3z$ deve ser igual a 3 e não 4. Apesar disso, a regra de Cramer (usada incorretamente, pois foi deduzida mediante a hipótese de que $\det[a, b, c] \neq 0$) nos levaria às "expressões indeterminadas" $x = 0/0$, $y = 0/0$, $z = 0/0$ e à falsa conclusão de que o sistema é indeterminado.

**Observação 2.** Resulta da fórmula $\det[d, b, c] = x \det[a, b, c]$ e suas análogas para $y$ e $z$ que, se $\det[a, b, c] = 0$ e algum dos determinantes $\det[d, b, c]$, $\det[a, d, c]$ ou $\det[a, b, d]$ for $\neq 0$, então o sistema é impossível.

**Observação 3.** Vimos que há duas interpretações "duais" para um sistema de 3 equações a 3 incógnitas. Se olhamos para as 3 linhas, podemos vê-lo como três planos no espaço e as soluções são os pontos comuns a esses planos. Se olharmos para as colunas vê-lo-emos como um vetor $d$, que se procura exprimir como combinação linear de três vetores dados $a$, $b$, $c$. Neste caso, as soluções do sistema serão os coeficientes $x$, $y$, $z$ da combinação linear $d = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c$.

Poder-se-ia pensar que o tratamento segundo linhas, ao qual demos prioridade no Capítulo 3, é o único geométrico pois lida com planos no espaço, enquanto o tratamento segundo colunas é algébrico, pois cuida de combinações lineares. Entretanto, olhando para as colunas vê-se facilmente que, se os vetores $a$, $b$, $c$ são coplanares, o sistema não admite solução a menos que o vetor $d$ esteja nesse plano. Isto é uma conclusão geométrica.

Assim, ao analisar um sistema linear, é vantajoso não ter espírito preconcebido, encarando-o sob vários aspectos: linhas, colunas, interseção de planos, combinações lineares e determi-

nantes. A confluência dessas várias interpretações ilustra muito bem a riqueza de um assunto, aparentemente elementar, porém de grande utilidade na Matemática e em suas aplicações.

**Exemplo 2.** Resolver o sistema

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 3z &= 2 \\ 4x + 4y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

usando a regra de Cramer. As colunas são $a = (1, 2, 4)$, $b = (1, 3, 4)$, $c = (2, 3, 5)$ e $d = (1, 2, 3)$. Temos $\det[a, b, c] = -3$, $\det[d, b, c] = 0$, $\det[a, d, c] = -1$ e $\det[a, b, d] = -1$. Portanto $x = 0$, $y = 1/3$ e $z = 1/3$.

## 5. O determinante do produto de duas matrizes

Se $m$ e $n$ são matrizes $2 \times 2$, uma verificação extremamente simples mostra que o determinante da matriz-produto $mn$ é igual ao produto $\det m \cdot \det n$. Mostraremos agora que a fórmula $\det mn = \det m \cdot \det n$ vale também para matrizes $3 \times 3$. Na verdade, nosso método de demonstração se estende diretamente para o caso geral de matrizes $n \times n$.

Consideremos portanto as matrizes

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad n = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix},$$

cujo produto é a matriz $mn$ definida por

$$\begin{bmatrix} a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3 & a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 & a_1t_1 + b_1t_2 + c_1t_3 \\ a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3 & a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 & a_2t_1 + b_2t_2 + c_2t_3 \\ a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3 & a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 & a_3t_1 + b_3t_2 + c_3t_3 \end{bmatrix}.$$

Se indicarmos com

$$u = (r_1, s_1, t_1),\ v = (r_2, s_2, t_2) \text{ e } w = (r_3, s_3, t_3)$$

os vetores-linha da matriz $n$ então as linhas da matriz-produto

mn são os vetores

$$X_1 = a_1 \cdot u + b_1 \cdot v + c_1 \cdot w,$$
$$X_2 = a_2 \cdot u + b_2 \cdot v + c_2 \cdot w \quad \text{e}$$
$$X_3 = a_3 \cdot u + b_3 \cdot v + c_3 \cdot w.$$

Estabelecidas ests notações, podemos escrever

$$\det \mathbf{mn} = \det[X_1, X_2, X_3] = \det[a_1 \cdot u + b_1 \cdot v + c_1 \cdot w, X_2, X_3] =$$
$$= a_1 \det[u, X_2.X_3) + b_1 \det[v, X_2, X_3] + c_1 \det[w, X_2, X_3].$$

Usando repetidamente as propriedades dos determinantes, vamos calcular cada uma das três parcelas acima. Em primeiro lugar, como $X_2 = a_2 \cdot u + b_2 \cdot v + c_2 \cdot w$, temos:

$$\det[u, X_2, X_3] = a_2 \det[u, u, X_3] + b_2 \det[u, v, X_3] + c_2 \det[u, w, X_3],$$

onde

$$\det[u, u, X_3] = 0,$$
$$\det[u, v, X_3] = a_3 \det[u, v, u] + b_3 \det[u, v, v] + c_3 \det[u, v, w] =$$
$$= c_3 \det[u, v, w] = c_3 \det \mathbf{n},$$
$$\det[u, w, X_3] = a_3 \det[u, w, u] + b_3 \det[u, w, v] + c_3 \det[u, w, w] =$$
$$= b_3 \det[u, w, v] = -b_3 \det[u, v, w] = -b_3 \det \mathbf{n}.$$

Portanto:

$$a_1 \det[u, X_2, X_3] = (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2) \det \mathbf{n}.$$

Analogamente se mostra que

$$b_1 \det[v, X_2, X_3] = (a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3) \det \mathbf{n}$$

e

$$c_1 \det[w, X_2, X_3] = (a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1) \det \mathbf{n}.$$

Concluímos então que

$$\det \mathbf{mn} = (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2$$
$$- a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1) \cdot \det \mathbf{n},$$

ou seja,

$$\det \mathbf{mn} = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{n}.$$

Usaremos a fórmula $\det \mathbf{mn} = \det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{n}$ para obter uma bela expressão para a área de um paralelogramo.

Sejam $P, A, B$ três pontos não-colineares no espaço. Ponhamos $u = \overrightarrow{PA}$ e $v = \overrightarrow{PB}$. Considerando $u + v = \overrightarrow{PC}$ obtemos o paralelogramo

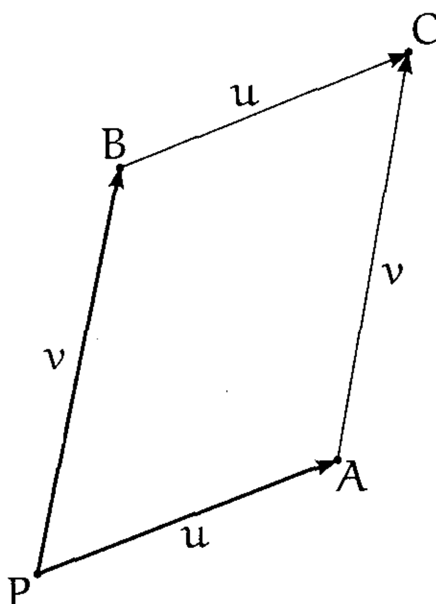



**Figura 76**

$PACB$, no qual $A = P + u$, $B = P + v$ e $C = P + (u + v)$. A *matriz de Gram* dos vetores $u, v$ é, por definição:

$$g(u,v) = \begin{bmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{bmatrix}.$$

(É claro que $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$.)

Mostraremos que $\det g(u,v)$ é o quadrado da área do paralelogramo $PACB$. Lembremos que o produto interno de dois vetores não depende do sistema de coordenadas. Consideremos então o sistema $PXYZ$, com origem no ponto $P$, tal que os pontos $A$ e $B$ pertençam ao plano horizontal $z = 0$. As coordenadas dos vetores

$u$ e $v$ neste sistema são $u = (a_1, b_1, 0)$ e $v = (a_2, b_2, 0)$. Então

$$g(u,v) = \begin{bmatrix} a_1a_1 + b_1b_1 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2a_2 + b_2b_2 \end{bmatrix}.$$

Fica então claro que, pondo

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \text{ tem-se } m^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \text{ e } mm^T = g(u,v).$$

Sabemos que $\det m = \det m^T$. Portanto

$$\det g(u,v) = \det(mm^T) = \det m \cdot \det m^T = (\det m)^2.$$

Já vimos no Capítulo 1 que o valor absoluto de $\frac{1}{2}\det m$ é igual à área do triângulo PAB. Logo $|\det m|$ é a área do paralelogramo PACB. Assim:

$$\det g(u,v) = (\text{Área do paralelogramo PACB})^2.$$

Mostraremos agora que uma expressão análoga vale para o volume de um paralelepípedo.

Com os vetores $u$, $v$, $w$ do espaço, formamos as matrizes

$$g(u,v,w) = \begin{bmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle & \langle u,w\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle w,u\rangle & \langle w,v\rangle & \langle w,w\rangle \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

$g(u,v,w)$ é a chamada *matriz de Gram* dos vetores dados. Evidentemente, ela não depende do sistema de eixos adotado. Já a matriz $m$, cujas linhas são as coordenadas dos vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$, $w = (a_3, b_3, c_3)$ em relação a um sistema OXYZ, varia conforme os eixos que se tomem. Mas se escrevermos explicitamente os elementos da matriz de Gram, veremos que

$$g(u,v,w) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_1 + b_1b_1 + c_1c_1 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2a_2 + b_2b_2 + c_2c_2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 & a_3a_3 + b_3b_3 + c_3c_3 \end{bmatrix},$$

portanto $\mathbf{m}(u, v, w) = \mathbf{m}\mathbf{m}^T$.

Segue-se daí que $\det \mathbf{g}(u, v, w) = \det \mathbf{m} \det \mathbf{m}^T = (\det \mathbf{m})^2$.

Por conseguinte, o determinante da matriz $\mathbf{m}$ depende apenas dos vetores $u$, $v$, $w$ mas não do sistema de eixos escolhido.

Esta observação nos permitirá obter a expressão que buscamos para o volume de um paralelepípedo.

Sejam $P$, $A$, $B$ e $C$ quatro pontos não-coplanares. Consideremos os vetores $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$. Os pontos $P$, $A$, $B$ e $C$ determinam um paralelepípedo cujos outros quatro vértices são os pontos $D = P + (u + v)$, $P + (u + w)$, $P + (v + w)$ e $P + (u + v + w)$.

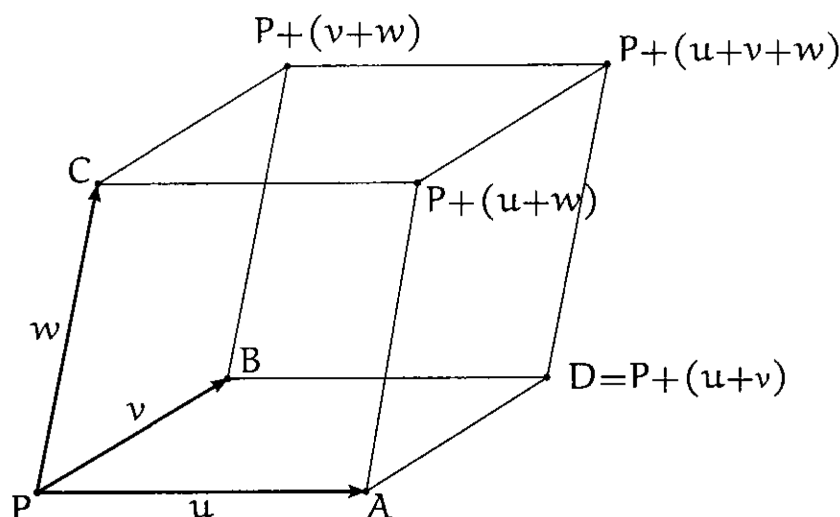



**Figura 77**

Chamemos de $S$ (sólido) esse paralelepípedo.

Sabemos que $\operatorname{vol} S$ é o produto da área do paralelogramo $PADB$ pela altura de $S$ relativa a esta base.

Tomemos no espaço um sistema de eixos $PXYZ$, com origem no ponto $P$, de tal modo que a base do paralelepípedo esteja contida no plano horizontal $OXY$.

Neste sistema, as coordenadas dos vetores $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$ são respectivamente $u = (a_1, b_1, 0)$, $v = (a_2, b_2, 0)$ e $w = (a_3, b_3, c)$. Portanto $|c|$ é a altura do paralelepípedo $S$.

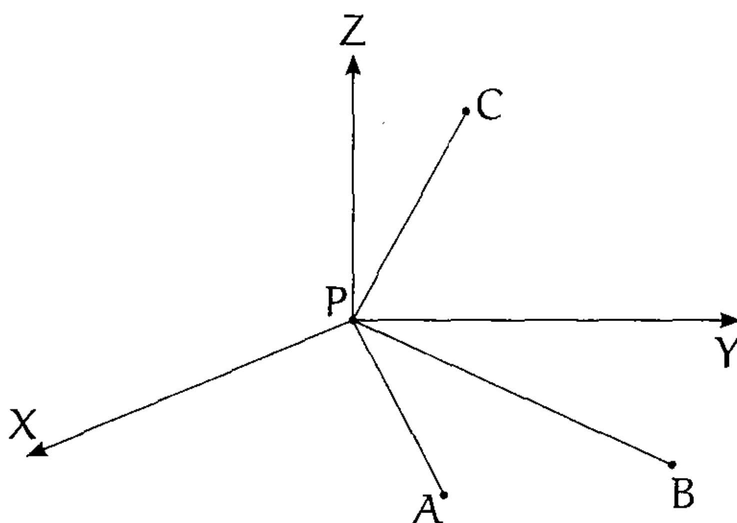



**Figura 78**

A matriz $\mathrm{m}$, que tem esses vetores como linhas, assume o aspecto abaixo:

$$\mathrm{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c \end{bmatrix} ;$$

logo

$$\det \mathrm{m} = c \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} .$$

Ora, conforme vimos acima, a área do paralelogramo PABD, base de S, é igual ao valor absoluto do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} .$$

Segue-se que

$$|\det \mathrm{m}| = |c| \cdot (\text{área do paralelogramo PABD}) = \text{vol} \cdot S.$$

Como $\det \mathrm{m}$ depende apenas dos vetores $u$, $v$, $w$ mas não do sistema de eixos escolhido, podemos então afirmar que, se $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w = (a_3, b_3, c_3)$ são as coordenadas dos vetores $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$ em relação a qualquer sistema de eixos ortogonais tomados no espaço, então o volume do paralelepípedo construído a partir dos quatro pontos não-colineares

P, A, B e C é igual ao valor absoluto do determinante da matriz

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, é bem conhecido que o volume do tetraedro PABC é igual a 1/6 do volume do paralelepípedo S, logo $\mathrm{vol}(PABC) = \frac{1}{6}|\det m|$, onde m é matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores $u = \overrightarrow{PA}$, $v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$.

Vemos ainda que $\det g(u, v, w) = (\mathrm{vol}\, S)^2 = 36 \cdot [\mathrm{vol}(PABC)]^2$.

## 6. Caracterização das matrizes invertíveis

A maneira mais popularizada de caracterizar a invertibilidade de uma matriz é por meio do seu determinante, conforme o

**Teorema.** *A matriz quadrada* m *é invertível se, e somente se,* $\det m \neq 0$.

A metade da demonstração (ou a demonstração da metade) deste fato consiste no uso imediato da fórmula $\det(mn) = \det m \cdot \det n$. Com efeito, se a matriz m possui a inversa $m^{-1}$, da igualdade $m \cdot m^{-1} = I_3$ se conclui que $\det m \cdot \det(m^{-1}) = 1$, logo $\det m \neq 0$ e, mais ainda, $\det m^{-1} = 1/\det m$.

Suponhamos agora que, reciprocamente, se tenha $\det m \neq 0$. Procuremos uma matriz p tal que $mp = I_3$. Escrevamos

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação matricial $mp = I_3$ significa que os vetores-coluna da matriz procurada p são soluções $(x_1, x_2, x_3)$, $(y_1, y_2, y_3)$ e $(z_1, z_2, z_3)$ dos sistemas abaixo:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_3 &= 0 \\ a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 &= 1 \\ a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_3 &= 0 \\ a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 &= 0 \, . \\ a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 &= 1 \end{aligned}$$

Como $\det \mathbf{m} \neq 0$, segue-se da seção 3 que as linhas da matriz $\mathbf{m}$ são linearmente independentes, logo (vide Capítulo 3) cada um dos sistemas acima admite uma única solução. Noutras palavras, existe uma única matriz $\mathbf{p}$, do tipo $3 \times 3$, tal que $\mathbf{mp} = \mathbf{I}_3$.

Num argumento inteiramente análogo, têm-se 3 sistemas com a matriz $\mathbf{m}^\top$ (cujo determinante é o mesmo de $\mathbf{m}$). As soluções desses 3 sistemas são as linhas de uma matriz $\mathbf{q}$, do tipo $3 \times 3$, tal que $\mathbf{qm} = \mathbf{I}_3$. Mas é claro que

$$\mathbf{q} = \mathbf{qI}_3 = \mathbf{q}(\mathbf{mp}) = (\mathbf{qm})\mathbf{p} = \mathbf{I}_3\mathbf{p} = \mathbf{p}.$$

Logo $\mathbf{pm} = \mathbf{mp} = \mathbf{I}_3$, isto é, $\mathbf{p} = \mathbf{m}^{-1}$ é a matriz inversa de $\mathbf{m}$. Assim, $\det \mathbf{m} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{m}$ invertível.

Vemos portanto que as seguintes afirmações a respeito de uma matriz $\mathbf{m}$ do tipo $3 \times 3$ são equivalentes:

1. As linhas de $\mathbf{m}$ são linearmente independentes;
2. Todo sistema de equações lineares $\mathbf{mx} = \mathbf{d}$ tem solução única, seja qual for a matriz $\mathbf{d}$, do tipo $3 \times 1$;
3. $\det \mathbf{m} = \det \mathbf{m}^\top \neq 0$;
4. As colunas de $\mathbf{m}$ são linearmente independentes;
5. Existe uma única matriz $\mathbf{m}^{-1}$ tal que $\mathbf{m}^{-1}\mathbf{m} = \mathbf{mm}^{-1} = \mathbf{I}_3$ ($\mathbf{m}$ é invertível).

**Observações.** 1. A restrição a matrizes $3 \times 3$ é meramente uma conveniência didática. Todos os resultados deste capítulo continuam válidos, com as mesmas demonstrações, para matrizes $n \times n$ em geral.

2. Estamos agora em condições de justificar uma afirmação feita na seção 2: se $\mathbf{m}$ e $\mathbf{p}$ são matrizes do tipo $n \times n$ tais que $\mathbf{mp} = \mathbf{I}_n$ então vale necessariamente $\mathbf{pm} = \mathbf{I}_n$. Com efeito, se $\mathbf{mp} = \mathbf{I}_n$ então $\det \mathbf{m} \cdot \det \mathbf{p} = 1$, logo $\det \mathbf{m} \neq 0$. Então $\mathbf{m}$ possui uma inversa

$m^{-1}$. Multiplicando à esquerda ambos os membros da igualdade $mp = I_n$ por $m^{-1}$ obtemos $p = m^{-1}$, portanto $pm = m^{-1}m = I_n$.

## Exercícios

1) Seja $m$ uma matriz quadrada $n \times n$. Chama-se *traço* de $m$ a soma $\operatorname{tr} m = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ dos elementos $a_{ii}$ da sua diagonal. Prove que $\operatorname{tr}(m + n) = \operatorname{tr} m + \operatorname{tr} n$, $\operatorname{tr} \alpha m = \alpha \operatorname{tr} m$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e que $\operatorname{tr}(mn) = \operatorname{tr}(nm)$.

2) Dadas as matrizes
$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad n = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix},$$
defina as funções $M, N: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (transformações lineares) pondo, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x, y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$, $N(x, y) = (c_1x + d_1y, c_2x + d_2y)$. Prove que a composta $M \circ N: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem a forma $(M \circ N)(x, y) = (r_1x + s_1y, r_2x + s_2y)$, onde
$$\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix} = mn.$$
Enuncie e prove um resultado análogo para matrizes $3 \times 3$. Generalize.

3) Sejam $m$ e $p$ matrizes $3 \times 3$, com $p$ invertível. Prove que $m$ e $p^{-1}mp$ têm o mesmo traço.

4) No exercício 2, mostre que se $\det m \neq 0$ então a função $M$ transforma todo paralelogramo $P$ (ou paralelepípedo, conforme se considere $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) noutro paralelogramo (ou paralelepípedo) $P'$ tal que área de $P'$ = (área de $P$) $\times \det m$, (ou vol $P'$ = vol $P \cdot \det m$).

5) Seja $f$ uma função que faz corresponder a cada par de vetores $v = (a_1, b_1)$, $w = (a_2, b_2)$ em $\mathbb{R}^2$ um número real $f(u, v)$. [Noutras palavras, tem-se uma função $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.] Suponha que $f$ tem as seguintes propriedades para quaisquer $v, v', w \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $f(v, w) = -f(w, v)$;

(b) $f(v + v', w) = f(v, w) + f(v', w)$;

(c) $f(\alpha v, w) = \alpha \cdot f(v, w)$;

(d) se $v = (1, 0)$ e $w = (0, 1)$ então $f(v, w) = 1$.

Prove que $f(v, w) = a_1 b_2 - a_2 b_1$,.

6) Enuncie e demonstre o análogo para $\mathbb{R}^3$ do exercicio anterior. Conclua que todas as propriedades do determinante são conseqüências destas quatro.

7) Dada a matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix},$$

mostre que $\mathbf{m}^2 = \mathbf{I}_2$. Ache números $\alpha$, $\beta$ tais que a matriz $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{I}_2$ cumpra $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$ e seja não-nula. A partir daí, encontre uma matriz não-nula $\mathbf{q}$ tal que $\mathbf{pq} = \mathbf{qp} = 0$. Escreva $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ explicitamente.

8) Seja

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

tal que $\Delta = \det \mathbf{m} \neq 0$. Resolva os sistemas de equações lineares

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= 1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} a_1y_1 + b_1y_2 &= 0 \\ a_2y_1 + b_2y_2 &= 1 \end{aligned}$$

e obtenha uma fórmula explícita para a matriz inversa

$$\mathbf{m}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

9) Partindo da matriz

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

e supondo $\Delta = \det m \neq 0$, use três vezes a regra de Cramer para mostrar que

$$m^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix},$$

onde $M_i = (-1)^{i+1}A_i$, $N_i = (-1)^i B_i$ e $P_i = (-1)^{i+1}C_i$ $(i = 1, 2, 3)$. [Conforme a notação estabelecida na seção 3, os números $A_i$, $B_i$ e $C_i$ são os menores relativos a $a_i$, $b_i$ e $c_i$ respectivamente.] A matriz $\Delta \cdot m^{-1}$ chama-se a *adjunta clássica* de m.

10) Escreva um sistema de 3 equações lineares com 3 incógnitas. Resolva-o por eliminação, pela regra de Cramer e pela fórmula $x = m^{-1} \cdot d$. Compare e comprove qual dos três métodos é o mais eficiente.

11) Uma matriz quadrada m chama-se *ortogonal* quando $m^T = m^{-1}$. Prove que m é ortogonal se, e somente se, seus vetores-linha (ou coluna) são dois a dois ortogonais de comprimento 1. Dê exemplos de matrizes ortogonais $2 \times 2$ e $3 \times 3$ nas quais nenhum elemento é igual a zero. (Veja Exercício 14, Capítulo 2.)

12) Seja m uma matriz $3 \times 3$ ou $3 \times 4$. Diz-se que m tem *posto* 1 quando uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplos dela. Prove que, neste caso, uma de suas colunas é não-nula e as outras colunas são múltiplos dela.

13 Prove que uma matriz m, do tipo $3 \times 3$, tem posto 1 se, e somente se, existem números $a_1$, $a_2$, $a_3$ e $b_1$, $b_2$, $b_3$ tais que

$$m = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}.$$

Enuncie e demonstre um fato análogo para matrizes $3 \times 4$.

14) Seja $m$ uma matriz $3 \times 3$. Diz-se que $m$ tem *posto* 2 quando duas de suas linhas são linearmente independentes e a outra é combinação linear delas. Prove que se $m$ tem posto 2 então duas de suas colunas são linearmente independentes e a outra coluna é combinação linear delas. Enuncie e demonstre um resultado análogo para matrizes $3 \times 4$.

15) Diz-se que uma matriz $3 \times 3$ tem *posto* 3 quando suas linhas são linearmente independentes. Prove que se $m$ tem posto 3 então suas três colunas são linearmente independentes.

16) Diz-se que uma matriz $3 \times 4$ tem *posto* 3 quando suas linhas são linearmente independentes. Prove que, neste caso, três de suas colunas são linearmente independentes e a quarta é necessariamente uma combinação linear delas.

17) Prove o Teorema de Rouché: um sistema de 3 equações lineares com três incógnitas tem solução se, e somente se, o posto da matriz do sistema é igual ao posto da matriz aumentada. [Note que o posto de uma matriz não-nula é o número máximo de linhas - ou colunas - linearmente independentes dessa matriz.]

18) Este exercicio é longo porém fácil e bastante instrutivo. Dados os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, chame de *produto vetorial* de $u$ por $v$ ao vetor

$$u \times v = (b_1c_2 - b_2c_1, -(a_1c_2 - a_2c_1), a_1b_2 - a_2b_1).$$

Prove as seguintes propriedades do produto vetorial:

a) $(u + u') \times v = u \times v + u' \times v$;
$(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v), \alpha \in \mathbb{R}$; e
$u \times v = -v \times u$.

b) Para todo vetor $w = (a_3, b_3, c_3)$, se indicarmos com $\det[u, v, w]$ o determinante da matriz cujas linhas são $u$,

$v$, $w$, desenvolvendo-o segundo a terceira linha vê-se que:

$$\langle u \times v, w \rangle = \det[u, v, w].$$

c) $u \times v$ é ortogonal a $u$ e a $v$.

d) $u \times v = 0$ se, e somente se, os vetores $u$ e $v$ são colineares.

e) $|u \times v|^2 = \det[u, v, u \times v] = \text{vol}[u, v, u \times v] = |u \times v| \cdot$ área $[u, v]$, onde $\text{vol}[u, v, u \times v]$ é o volume do paralelepípedo $S$ que tem os vetores $u$, $v$, $u \times v$ por arestas, como no texto. Analogamente, área$[u, v]$ é a área do paralelogramo construído com os vetores $u$, $v$ por lados.

f) $|u \times v| =$ área$[u, v] = \sqrt{|u|^2|v|^2 - \langle u, v \rangle^2}$.

g) $(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2$ para quaisquer $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$ e $c_2$ (identidade de Lagrange).

h) Dado um paralelogramo no espaço, o quadrado de sua área é igual à soma dos quadrados das áreas de suas três projeções ortogonais sobre os planos $\Pi_{xy}$, $\Pi_{yz}$ e $\Pi_{xz}$.

19) Seja $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Resolva dois sistemas $2 \times 2$ para obter uma matriz $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{mp} = \mathbf{I}_2$.

20) Sejam $\mathbf{m}$ e $\mathbf{p}$ matrizes $3 \times 3$. Se uma das linhas de $\mathbf{m}$ é múltiplo de outra, prove que o mesmo ocorre com a matriz produto $\mathbf{mp}$. Conclua que $\mathbf{m}$ não possui uma matriz inversa.

21) Torne mais abrangente o resultado acima: mostre que se alguma linha de $\mathbf{m}$ é combinação linear das outras duas então o mesmo ocorre com $\mathbf{mp}$, seja qual for $\mathbf{p}$. Conclua que, nestas condições, $\mathbf{m}$ não é invertível.

22) Determine quais das matrizes abaixo têm uma linha que é

combinação linear das outras duas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

23) Sejam OA, OB e OC segmentos de reta perpendiculares dois a dois. Use a matriz de Gram para mostrar que

$$(\text{área } OAB)^2 + (\text{área } OBC)^2 = (\text{área } ABC)^2.$$

24) Sejam $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AD} = 5$ as medidas de três arestas de um bloco retangular. Determine a área do triângulo BCD.

25) Calcule a área da superfície de um prisma reto cuja base é um paralelogramo ABCD, com $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 10$ e três das arestas verticais têm medidas $\overline{AA'} = 2$, $\overline{BB'} = 5$ e $\overline{CC'} = 7$.

26) Dado um triângulo acutângulo ABC, mostre que existe um (e somente um) ponto O no espaço, tal que os ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são retos. Determine as medidas das arestas e da altura da pirâmide de base ABC e vértice O em função dos lados $a$, $b$, $c$ do triângulo ABC.

Capítulo 5

# Números Complexos

## 1. Introdução

Em 1545, Jerônimo Cardano (1501–1576), em seu livro "Ars Magna" (A Grande Arte), mostrou o método para resolver equações do terceiro grau que é hoje chamado de Fórmula de Cardano. Bombelli (1526–1572), discípulo de Cardano, em sua "Álgebra", aplicou a fórmula de Cardano à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ obtendo

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Embora não se sentisse completamente a vontade em relação às raízes quadradas de números negativos (dizia que eram inúteis e sofísticas), Bombelli operava livremente com elas, aplicando-lhes as regras usuais da Álgebra.

No caso, Bombelli mostrou que

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3\cdot 2\cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \\ &= 2 + \sqrt{-121}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$

e, analogamente,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}.$$

Portanto, o valor de $x$ é $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Como 4 é realmente raiz da equação, a partir de Bombelli os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos, embora se sentissem um pouco desconfortáveis com isso. Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade $\sqrt{-1}$, que hoje chamamos de unidade imaginária e representamos por $i$. Apenas no século XIX, quando Gauss (1787–1855), o grande matemático da época e um dos maiores de todos os tempos, divulga a representação geométrica dos números complexos é que essa sensação de desconforto desaparece.

## 2. A forma algébrica

Um número complexo é um número da forma $x + yi$, com $x$ e $y$ reais e $i = \sqrt{-1}$. Fixando um sistema de coordenadas no plano, o complexo $z = x + yi$ é representado pelo ponto $P(x, y)$. O ponto $P$ é chamado de *imagem* do complexo $z$. Como a correspondência entre os complexos e suas imagens é um-a-um, freqüentemente identificaremos os complexos a suas imagens escrevendo $(x, y) = x + yi$. O plano no qual representamos os complexos é chamado de plano de Argand–Gauss*

Os números representados no eixo dos $x$ são da forma $(x, 0) = x + 0i = x$, isto é, são números reais. Por esse motivo, o eixo dos $x$ é chamado de *eixo real*.

Os complexos representados no eixo dos $y$ são da forma $(0, y) = 0 + yi = yi$. Esses complexos são chamados de números *imaginários puros*.

As coordenadas $x$, $y$ do complexo $z = x + yi$ são chamadas respectivamente de *de parte real* e *parte imaginária* de $z_0$. Escreve-se $\mathrm{Re}(z) = x$ e $\mathrm{Im}(z) = y$.

Os complexos $z = x + yi$ e $z' = x' + iy'$ são iguais (por definição) se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$. Em particular, tem-se $x + iy = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$.

*Argand, J.R. (1768–1822), matemático francês.

**Exemplo 1.**

a) $(2+3i)+(4-i)=6+2i$.

b) $(2+3i)-(4-i)=-2+4i$.

c) $(2+3i)(4-i)=8-2i+12i-3i^2=8-2i+12i-3(-1)=11+10i$.

d) $(2+3i)^2=2^2+2\cdot 2\cdot 3i+(3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i+9(-1)=-5+12i$.

O conjugado do complexo $z=x+yi$, $x$ e $y$ reais, é o complexo $\bar{z}=x-yi$. É fácil ver que complexos conjugados têm imagens simétricas em relação ao eixo real. Note que o produto

$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)\cdot(x-yi)=x^2-y^2i^2=x^2+y^2$$

é um número real. Para dividir números complexos, multiplicamos dividendo e divisor pelo conjugado do divisor, o que transforma o problema em uma divisão por um número real.

**Exemplo 2.**

$$\frac{2+3i}{4-i}=\frac{2+3i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i}=\frac{8+2i+12i+3i^2}{16-i^2}=\frac{5+14i}{17}=\frac{5}{17}+\frac{14}{17}i.$$

As potências de $i$ apresentam um comportamento interessante. Observe abaixo o cálculo das sete primeiras potências:

$$\begin{array}{ll} i^0=1; & i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1; \\ i^1=i; & i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i; \\ i^2=-1; & i^6=i^4\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=-1; \\ i^3=i^2\cdot i=-i; & i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i \end{array}$$

Estas potências se repetem em ciclos de 4. Com efeito, $i^{n+4}=i^n\cdot i^4=i^n\cdot 1=i^n$. Isso nos permite estabelecer uma regra para o cálculo de potências de $i$. Para calcular $i^n$, divida $n$ por 4; se $r$ é o resto dessa divisão, temos $i^n=i^r$. Com efeito, se $q$ é o quociente da divisão, $i^n=i^{4q+r}=\left(i^4\right)^q\cdot i^r=1^q\cdot i^r=i^r$.

**Exemplo 3.** Calcular $i^{1\,999\,945\,347}$.

**Solução**: Basta determinar o resto da divisão de 1 999 945 347 por 4. Ora, para determinar o resto da divisão por 4, basta deter-

minar o resto da divisão do número formado pelos dois últimos algarismos, no caso, 47. Como 47 dividido por 4 dá resto 3, temos $i^{1\,999\,945\,347} = i^3 = -i$.

**Exemplo 4.** Resolva a equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

**Solução**: Temos

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

**Exemplo 5.** Determine as raízes quadradas de $3 - 4i$.

**Solução**: Queremos determinar os complexos $z = x + yi$, $x$ e $y$ reais, tais que $z^2 = 3 - 4i$. Temos

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2yi + y^2i^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 3 - 4i.$$

Para que esses complexos sejam iguais, eles devem ter as mesmas coordenadas. Daí,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}.$$

A segunda equação dá $y = -2/x$; substituindo na primeira equação obtemos

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \quad \text{ou ainda,} \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Daí, $x^2 = 4$ ou $x^2 = -1$. Como $x$ é real, temos apenas duas possibilidades: $x = 2$ ou $x = -2$. Como $y = -2/x$, obtemos $y = -1$ ou $y = 1$, respectivamente. As raízes são $2 - i$ e $-2 + i$.

Poderíamos aproveitar um resultado conhecido que é a fórmula de transformação de radicais duplos:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

$$\sqrt{3 - 4i} = \sqrt{3 - \sqrt{16i^2}} = \sqrt{3 - \sqrt{-16}}.$$

Aplicando a fórmula de transformação com $A = 3$ e $B = -16$, temos

$$\sqrt{A^2 - B} = \sqrt{9 - (-16)} = 5$$

e um dos valores de

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{3 - 4i}$$

é

$$\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} = \sqrt{\frac{3+5}{2}} - \sqrt{\frac{3-5}{2}}$$
$$= 2 - \sqrt{-1} = 2 - i.$$

É claro que a outra raiz quadrada é $-(2 - i) = -2 + i$.

**Exemplo 6.** Identifique geometricamente o conjunto dos complexos da forma $z = t + it^2$, quando o número real $t$ varia de 0 a 1.

**Solução**: As coordenadas das imagens desses complexos são $x = t$, $y = t^2$, com $0 \leqslant t \leqslant 1$. Formam, portanto, o arco da parábola $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Encerramos esta seção com uma lista de propriedades de complexos conjugados.

**Teorema**: *Se z e w são complexos, então:*

i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
ii) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$.
iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
iv) *Se* $w \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
v) *Se* $z$ *é real*, $z = \bar{z}$.
vi) $\bar{\bar{z}} = z$.
vii) *Se* $n$ *é um inteiro positivo*, $\bar{z}^n = \overline{z^n}$.

**Prova:** Se $z = a+bi$ e $w = c+di$, com $a, b, c$ e $d$ reais, temos $z+w = (a+c)+(b+d)i$, $\overline{z+w} = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \bar{z}+\bar{w}$, o que prova i).

Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c$ e $d$ reais, temos $z - w = (a - c) + (b - d)i$, $\overline{z - w} = (a - c) - (b - d)i = (a - bi) - (c - di) =$ barz $- \overline{w}$, o que prova ii).

Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c$ e $d$ reais, temos $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$, $\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}$, o que prova iii).

Se $w = c + di$, com $c$ e $d$ reais não nulos simultaneamente, temos

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c + di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}, \qquad \frac{1}{\overline{w}} = \frac{1}{c - di} = \frac{c + di}{c^2 + d^2} = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

Daí,

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z \cdot \frac{1}{w}} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$$

o que prova iv).

Se $z = x + 0i$, $x$ real, $\overline{z} = x - 0i = z$, o que prova v).

Se $z = x + yi$, $\overline{\overline{z}} = \overline{(\overline{z})} = \overline{x - yi} = x + yi = z$, o que prova vi).

Finalmente, vii) decorre da aplicação reiterada de iii).

**Exemplo 7.** Resolva a equação $2z - \overline{z} = 1 + 6i$.

**Solução**: Pondo $z = x + yi$, com $x$ e $y$ reais, obtemos $2(x + yi) - (x - yi) = 1 + 6i$, ou seja $x + 3yi = 1 + 6i$. Daí, $x = 1$ e $3y = 6$. Logo, $z = x + yi = 1 + 2i$.

Outra solução pode ser obtida lembrando que dois complexos são iguais se e somente se seus conjugados são iguais. A equação é equivalente a $2\overline{z} - z = 1 - 6i$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2z - \overline{z} = 1 + 6i \\ 2\overline{z} - z = 1 - 6i \end{cases},$$

obtemos $z = 1 + 2i$ e $\overline{z} = 1 - 2i$.

**Teorema** *Se* $P(z)$ *é um polinômio de coeficientes reais, então* $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

**Prova:** Se $P(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k$, com $A_k$ real, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, temos $A_k = \overline{A_k}$, logo:

$$P(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} A_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{A_k} \cdot \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{A_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} A_k z^k} = \overline{P(z)}.$$

**Corolário** *Se um polinômio de coeficientes reais admite uma raiz complexa* $a + bi$, $a$ *e* $b$ *reais, então ele admite também a raiz* $a - bi$.

Com efeito, se $P(a + bi) = 0 = 0 + 0i$, então, pelo teorema $P(a - bi) = 0 - 0i = 0$.

## Exercícios

1) Determine: a) $\dfrac{(1 + 2i)^2}{3 + 4i}$. b) $(1 - i)^{12}$. c) $i^{-3333}$.
   d) $1 + i + i^2 + \cdots + i^{1789}$.

2) Determine $a$ real para que $\dfrac{2 + ai}{1 - i}$ seja: a) real. b) imaginário puro.

3) Determine a área do triângulo cujos vértices são as imagens das raízes da equação $z^3 + z^2 + z = 0$.

4) Determine as raízes quadradas de: a) $-5 - 12i$. b) $i$.

5) Determine os complexos que têm o quadrado igual ao conjugado.

6) Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos $z$ tais que:
   a) $z \cdot \overline{z} = 1$. b) $z^2$ é imaginário puro. c) $\operatorname{Re}(z) > 1$.
   d) $z = \overline{z}$. e) $z \cdot \overline{z} + z + \overline{z} = 0$. f) $z + \dfrac{1}{z}$ é real.
   g) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z + 1}{z - 1}\right) = 1$.

7) Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos da forma $t + i\sqrt{1 - t^2}$.

8) Se $z$ é um complexo não-real, qual é a natureza do quadrilátero cujos vértices são as imagens de $z$, $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$?

9) Resolva o sistema $\begin{cases} (1-i)\bar{z} + i \cdot w = i \\ 2z + (1+i)\overline{w} = 0 \end{cases}$.

10) Determine os complexos $z$ tais que $z + \dfrac{1}{z} = 1$.

11) a) Prove o Teorema de Bramagupta*: *Se* $a$ *e* $b$ *são números naturais e cada um deles é uma soma de dois quadrados perfeitos então* $ab$ *também é uma soma de dois quadrados perfeitos.*

b) Escreva $(5^2+6^2)\cdot(7^2+10^2)$ como uma soma de dois quadrados perfeitos.

12) Determine o polinômio de segundo grau, de coeficientes reais, que admite $1-3i$ como raiz.

13) Determine $a$ real para que a equação $z^2 + (a+i)z + 2 - 3i = 0$ admita uma raiz real.

14) Simplifique: a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

15) O polinômio $P(z)$, de coeficientes reais é tal que $P(1-2i) = 2+3i$. Determine o valor de $P(1+2i)$.

16) Uma das raízes da equação $x^4 + bx^2 + c = 0$, $b$ e $c$ reais, é $1+3i$. Determine as outras.

17) Para $n$ inteiro, quantos valores diferentes pode ter a expressão $i^n + i^{-n}$?

18) Calcule $1 + i + i^2 + \cdots + i^n$.

19) Prove que $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2 \cdot i}$.

20) Resolva as equações: a) $z + 2\bar{z} = 6 + i$. b) $(1+i)z + 3i\bar{z} = 2 + i$.

---

*Matemático hindu do século VII.

## 3. A Forma Trigonométrica

Suponhamos fixado um sistema de coordenadas no plano.

Vamos agora representar cada complexo $z = x + yi$ não mais pelo ponto $P(x, y)$, mas sim pelo vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y)$.

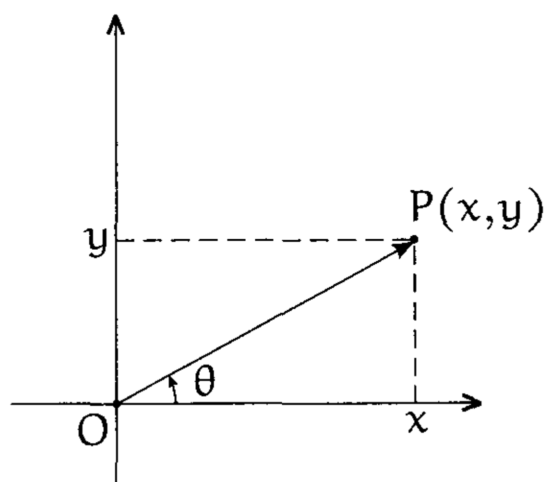



**Figura 79**

O módulo de um complexo $z = x + yi$ é definido como sendo o módulo do vetor que o representa, ou seja, é o valor $r$ da distância de sua imagem $P$ à origem. Portanto,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Um *argumento* de um complexo $z \neq 0$, $z = x + yi$, é, por definição, qualquer dos ângulos $\theta = \arg z$ que o vetor $\overrightarrow{OP}$ forma com o semi-eixo positivo dos $x$. É claro que todo complexo não-nulo tem uma infinidade de argumentos, dois quaisquer deles diferindo entre si por um múltiplo de $2\pi$. O argumento que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado de argumento principal e é representado por Arg $z$.

Se $\theta$ é um argumento de $z = x+yi$ então $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, o que permite escrever $z = x+yi = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, que é a chamada *forma trigonométrica* ou *polar* do complexo $z$. (Os números $r$ e $\theta$ são as *coordenadas polares* do ponto $P(x, y)$ do plano.)

**Exemplo 1.** Para o complexo $z = -1 + \sqrt{3}\,i$, temos

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Além disso,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, um dos valores possíveis para $\theta$ é $\frac{2\pi}{3}$ e a forma trigonométrica de $z$ é

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

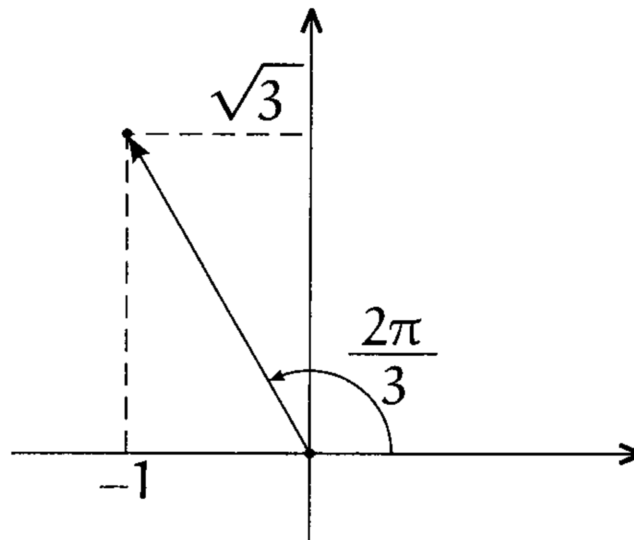



**Figura 80**

**Exemplo 2.** O complexo $z = 3i$ é representado pelo ponto $(0, 3)$, ou seja, pelo ponto 3 do eixo dos $y$. Portanto, $|z| = 3$ e um dos argumentos de $z$ é $\frac{\pi}{2}$. A forma trigonométrica de $z$ é

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

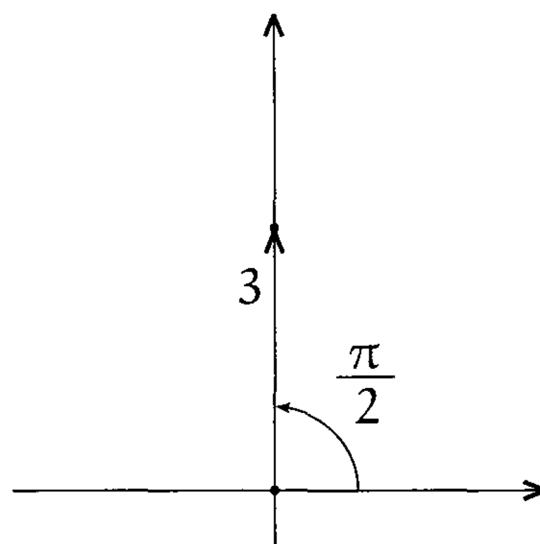



Figura 81

A soma (e a diferença) de dois complexos pode ser obtida somando-se (e subtraindo-se) os vetores que os representam.

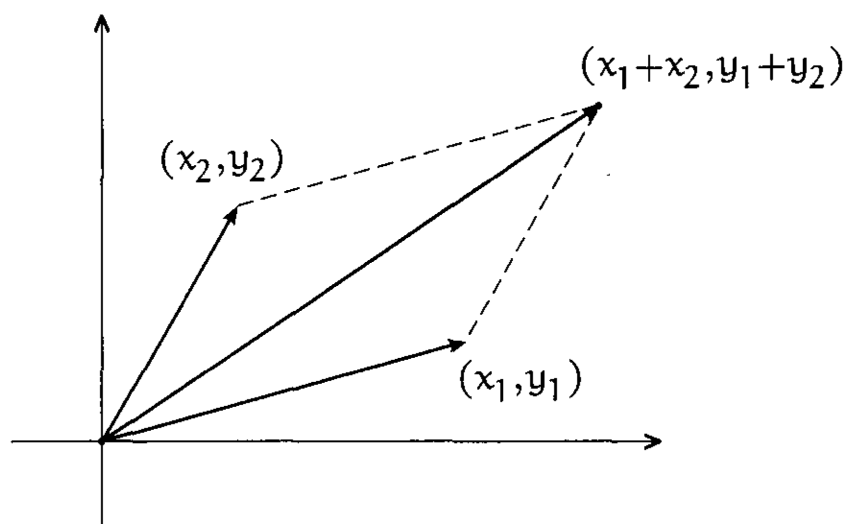



Figura 82

Com efeito, se $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, que é representado pelo vetor $(x_1 + x_2; y_1 + y_2) = (x_1; y_1) + (x_2; y_2)$ que é a soma dos vetores que representam $z_1$ e $z_2$.

Decorrem daí dois fatos:

i) Para números complexos vale a desigualdade triangular,

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Realmente, se os vetores que representam $z_1$ e $z_2$ não têm a mesma direção, para somá-los formamos um triângulo com lados $|z_1|$, $|z_2|$ e $|z_1 + z_2|$. Como em um triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença dos outros dois,

$$\big||z_1| - |z_2|\big| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$$

Se os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Se têm a mesma direção e sentidos opostos, $\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1 + z_2|$. Portanto, em qualquer caso,

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

ii) Se $z_1$ e $z_2$ são complexos, a distância entre eles é igual a $|\overrightarrow{z_1 z_2}| = |z_2 - z_1|$. A distância entre dois complexos é igual ao módulo de sua diferença.

**Exemplo 3.** Qual é o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que $|1 - z| = |3 + z|$?

**Solução:** O primeiro membro é a distância de z a 1 e o segundo membro, $|z + 3| = |z - (-3)|$, é a distância de z a $-3$. O lugar procurado é a mediatriz do segmento de extremos $-3$ e 1.

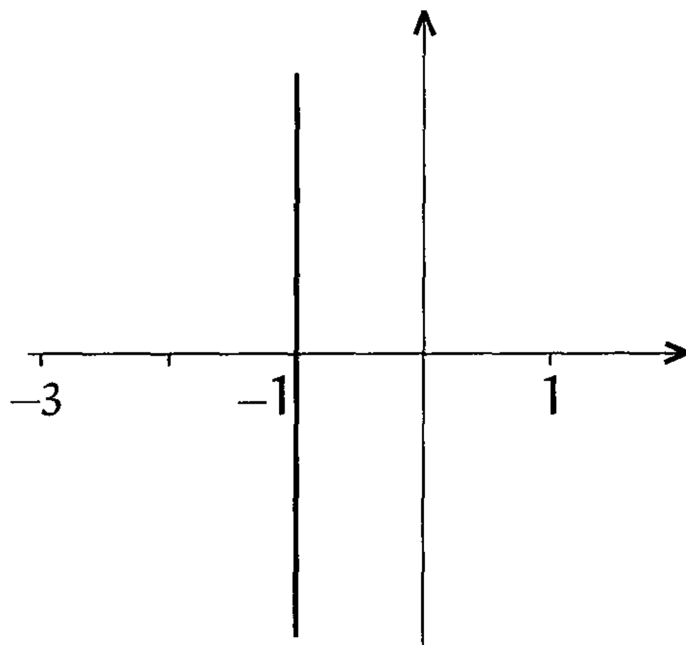



**Figura 83**

As operações com números complexos, exceto a adição e a subtração, se fazem mais facilmente na forma polar do que na algébrica, conforme mostraremos a seguir.

**Teorema:** *Se* $z_1 = r_1\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1$ *e* $z_2 = r_2\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2$, *então*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

*e, se* $r_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

**Prova:**

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2[\cos\theta_1\ \cos\theta_2 + i\cos\theta_1\ \text{sen}\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_1\ \cos\theta_2 + \\ &\quad + i^2\,\text{sen}\,\theta_1\ \text{sen}\,\theta_2] = \\ &= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\ \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\ \text{sen}\,\theta_2) + \\ &\quad + i(\cos\theta_1\ \text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\ \cos\theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Para provar a segunda parte, basta mostrar que

$$\frac{r_1}{r_2}\ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

multiplicado por $z_2$ é igual a $z_1$. Ora, pelo que já provamos na primeira parte, para multiplicar devemos multiplicar os módulos e somar os argumentos. Como $\frac{r_1}{r_2} \cdot r_2 = r_1$ e $(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2 = \theta_1$, temos

$$\frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \cdot z_2 = r_1 \cdot [\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1] = z_1.$$

Daí,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Observe que

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{se } |z_2| \neq 0)$$

e

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

A igualdade $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ significa que qualquer argumento de $z_1z_2$ é soma de um argumento de $z_1$ com um argumento de $z_2$ e vice-versa.

A fórmula a seguir, para o cálculo de potências de um complexo, é conhecida com o nome de Fórmula de De Moivre, em honra de Abraham de Moivre (1667–1754).

**Fórmula de De Moivre:** *Se* $n$ *é inteiro,*

$$[r \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

**Prova:** Para $n = 0$ ou $n = 1$, a fórmula é óbvia. Para $n$ inteiro maior que 1, a fórmula decorre da aplicação reiterada da fórmula da multiplicação.

Provemos a fórmula para o caso de $n$ inteiro negativo.

Seja $n = -m$, com $m$ inteiro e positivo. Temos

$$\begin{aligned}
(r \cdot [\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta])^n &= (r \cdot [\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta])^{-m} \\
&= \frac{1}{(r \cdot [\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta])^m} \\
&= \frac{1 \cdot \cos 0 + i \operatorname{sen} 0}{r^m[\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)]} \\
&= \frac{1}{r^m} \cdot \cos(0 - m\theta) + i \operatorname{sen}(0 - m\theta) \\
&= r^{-m} \cdot [\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta)] \\
&= r^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)],
\end{aligned}$$

**Exemplo 4.** Calcule $(1+i\sqrt{3})^{20}$.

**Solução:** $1+i\sqrt{3}$ tem módulo

$$r=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

e argumento $\theta$ tal que $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Daí, $\theta=\frac{\pi}{3}$ e

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^{20}&=\left(2\cdot\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right]\right)^{20}\\&=2^{20}\cdot\left[\cos\frac{20\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{20\pi}{3}\right]\\&=2^{20}\cdot\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right]\end{aligned}$$

pois $\frac{20\pi}{3}=6\pi+\frac{2\pi}{3}$ e $6\pi$ é um número inteiro de voltas. Portanto,

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^{20}&=2^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\\&=2^{20}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=2^{19}\cdot(-1+i\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Vejamos agora como calcular raízes de números complexos. Calcular

$$\sqrt[n]{r\cdot[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta]}$$

é determinar os complexos $z$ tais que

$$z^n=r\cdot[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta].$$

Pondo $z=\rho[\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha]$, obtemos

$$(\rho[\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha])^n=r\cdot(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta).$$

Pela fórmula de De Moivre,

$$\rho^n\cdot[\cos(n\alpha)+i\operatorname{sen}(n\alpha)]=r\cdot[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta].$$

Como complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes, $\rho^n = r$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi$, $k$ inteiro. Daí, $\rho = \sqrt[n]{r}$ e $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \cdot$ Portanto,

$$\sqrt[n]{r \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right].$$

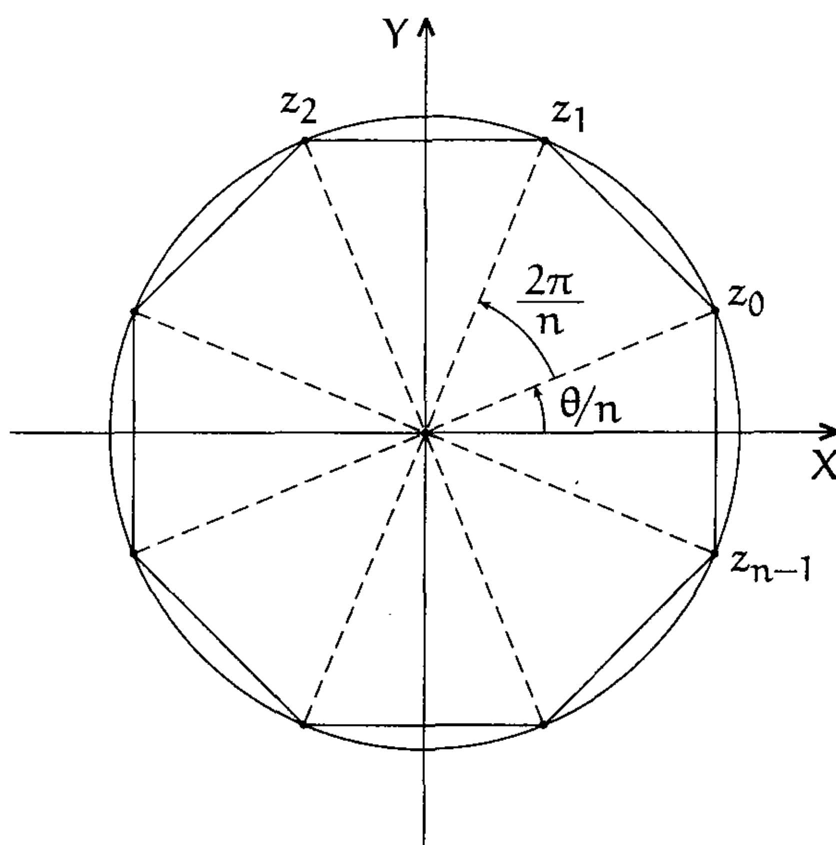



**Figura 84**

Observe que as raízes têm todas o mesmo módulo, $\sqrt[n]{r}$. Se $r \neq 0$, as imagens dessas raízes se situam em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Observe também que dando valores inteiros a $k$, os argumentos crescem em progressão aritmética de razão $2\pi/n$, o que mostra que essas raízes estão uniformemente espaçadas na circunferência. Se $r \neq 0$, as imagens dessas raízes são vértices de um polígono regular de $n$ lados inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Se $r = 0$, é claro que todas as raízes são iguais a 0.

**Exemplo 5.** Determine as raízes cúbicas de 8.

**Solução:** O número real positivo 8 tem módulo 8 e argumento 0. Então,

$$\sqrt[3]{8\cdot(\cos 0+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,0)}=\sqrt[3]{8}\cdot\left[\cos\frac{0+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{0+2k\pi}{3}\right]$$
$$=2\cdot\left[\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{3}\right].$$

Esses valores se repetem em ciclos de 3. Realmente, cada aumento de uma unidade no valor de $k$ gera um aumento de $2\pi/3$ no argumento. Um aumento de 3 unidades no valor de $k$ gera um aumento de $2\pi$ no argumento e faz com que o valor de

$$\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{3}$$

se repita. Note que essas raízes são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo de centro na origem e raio 2.

As raízes são obtidas fazendo $k = 0, 1, 2$ (pois se repetem a partir daí).

As raízes valem $2(\cos 0+\mathrm{i}\cdot\mathrm{sen}\,0)=2(1+\mathrm{i}\cdot 0)=2$;

$$2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3};$$

$$2\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$$

Encerramos esta seção com a interpretação geométrica da multiplicação de complexos. Quando multiplicamos um complexo $z$ por $\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$, o vetor que representa $z$ sofre uma rotação de um ângulo $\theta$ em torno da origem.

Com efeito, para multiplicar complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos. Como $\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$ tem módulo 1, $z\cdot[\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta]$ tem o mesmo módulo que $z$. O argumento de $z\cdot[\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta]$ é o argumento de $z$ aumentado de $\theta$. Logo, o vetor que representa $z\cdot[\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta]$ é o resultado da rotação do vetor que representa $z$ de um ângulo $\theta$ em torno da origem.

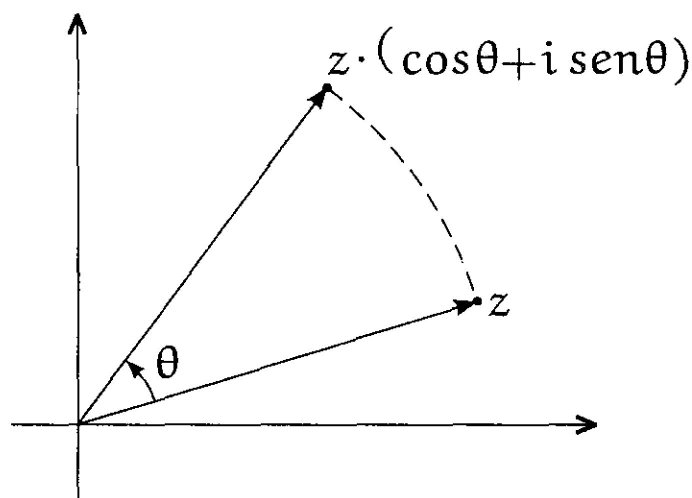



Figura 85

**Exemplo 6.** ABCD é um quadrado. Se A(1;2) e B(2;5), determine as coordenadas de C e D.

**Solução**: Há evidentemente duas soluções para a construção do quadrado, conforme mostra a figura.

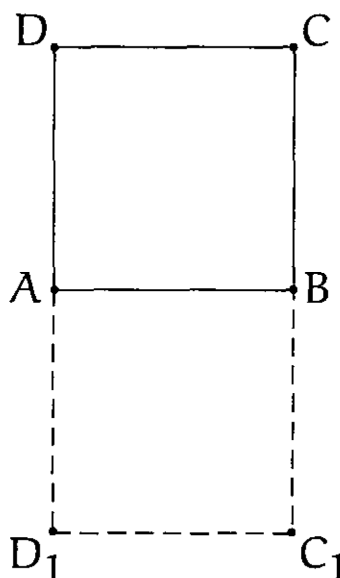



Figura 86

Na solução de cima, $\overrightarrow{AD}$ é obtido de $\overrightarrow{AB}$ por uma rotação de $+90°$. Portanto, $(D-A) = (B-A)[\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°]$.

$D-(1+2i) = (1+3i)\cdot i$ e $D = 1+2i+i+3i^2 = -2+3i = (-2;3)$.

Agora que temos D, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Daí, $D-A = C-B$, $C = B+D-A = (-1;6)$.

Na solução de baixo, A é ponto médio de $DD_1$. Logo, $A = \frac{D + D_1}{2}$ e $D_1 = 2A - D = (4;1)$. Analogamente, $C_1 = 2B - C = (5;4)$.

## Exercícios

1) Determine $(1 - i\sqrt{3})^5$.

2) Determine $\left|\frac{1 + ai}{1 - ai}\right|$, $a$ real.

3) Qual é a relação entre os argumentos de um complexo e de seu simétrico?

4) Qual a relação entre os argumentos de um complexo e de seu conjugado?

5) Calcule $(\sqrt{3} + i)^{-12}$.

6) Se $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, determine o valor de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{50}$.

7) Determine os valores inteiros de $n$ para os quais $(1 + i)^n = (1 - i)^n$.

8) Determine os valores inteiros de $n$ para os quais $(1 - \sqrt{3}i)^n$ é real.

9) Determine os valores inteiros de $n$ para os quais $(-\sqrt{3} + i)^n$ é imaginário puro.

10) Determine as raízes cúbicas de $i$.

11) Determine as raízes quartas de $-16$.

12) Determine os complexos que têm o cubo igual ao conjugado.

13) Calcule $\left|\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}}\right|$.

14) Determine $a$ real para que um dos argumentos de $a + 3i$ seja igual a $\frac{\pi}{6}$.

15) Determine $z$ sabendo que $|z| = |1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right|$.

16) Entre os complexos $z$ tais que $|z+1+i| = 1$, determine o de módulo máximo.

17) Se $|z-2| = 1$, quais os valores máximo e mínimo que $|z+i|$ pode ter?

18) Se $|z| = 3$, qual o maior valor que pode ter $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|$?

19) Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos $z$ tais que:

a) $|z| = 1$. b) $|z+i| \leqslant 1$. c) $|z+i| = |1-z|$.
d) $|1+z|+|1-z| = 4$. e) $|1+z|+|1-z| = 2$. f) $|1+z| = 2|1-z|$.
g) $\dfrac{z-1}{z+1}$ é imaginário puro.

20) Mostre que, para todo complexo $z$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

21) Se $z$ é um complexo, $|1-z|^2 + |1+z|^2 =$

a) $1+|z|^2$. b) $1+2|z|^2$. c) $2+z^2$. d) $2+2|z|^2$. e) $2+2z^2$.

22) Resolva as equações:

a) $z^2 + 2iz - 5 = 0$.

b) $z^3 + 1 = 0$.

c) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

d) $z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

e) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.

f) $z^n = (z-1)^n$, sendo $n > 1$.

g) $(z-1)^n = (z+1)^n$, sendo $n > 1$.

h) $z = z^5$.

i) $z^3 = (\bar{z})^{-2}$.

23) Se $|z| = 3$ e $|w| = 4$, o que se pode afirmar sobre:

a) $|z+w|$? b) $|z-w|$? c) $|z \cdot w|$? d) $\left|\frac{z}{w}\right|$?

24) Sendo $|z| = 3$ e $|w| = 4$, o que se pode afirmar sobre os argumentos de $z$ e de $w$ se:
a) $|z+w| = 5$? b) $|z+w| = 7$? c) $|z+w| = 1$?
d) $|z+w| = \sqrt{37}$?

25) Que se pode afirmar sobre os argumentos dos complexos não-nulos $z$ e $w$, se:
a) $zw$ é real? b) $\frac{z}{w}$ é real? c) $zw$ é imaginário puro?
d) $\frac{z}{w}$ é imaginário puro?

26) Determine o valor de $\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, para o qual $z = \sqrt{3} + i + 2\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ tem módulo máximo.

27) Determine $n$ inteiro para que $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$ seja raiz da equação $(1+z)^n = 1 + z^n$.

28) Resolva o sistema $\begin{cases} |z-2| = |z+4| \\ |z-3| + |z+3| = 10 \end{cases}$.

29) Determine o real $q$ para que a equação $z^3 - 5z + q = 0$ admita uma raiz não-real de módulo 2.

30) Os complexos $z$ e $w$ têm como imagens os pontos $A$ e $B$, respectivamente. Se $z = 2w + 5wi$ e $w \neq 0$, quanto vale o cosseno do ângulo $AOB$?

31) O complexo $z = x + yi$ dá uma volta completa sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, em sentido trigonométrico, partindo de $A(2,0)$. Qual a variação que sofre seu argumento?

32) O complexo $z - x + yi$ dá uma volta completa sobre a circunferência $(x-4)^2 + y^2 = 4$, em sentido trigonométrico, partindo de $A(2,0)$. Qual a variação que sofre seu argumento?

33) A figura mostra, no plano complexo, o círculo de centro na origem e raio 1, e as imagens de cinco números complexos. O complexo $\frac{1}{z}$ é igual a: (a) $z$ (b) $w$ (c) $r$ (d) $s$ (e) $t$

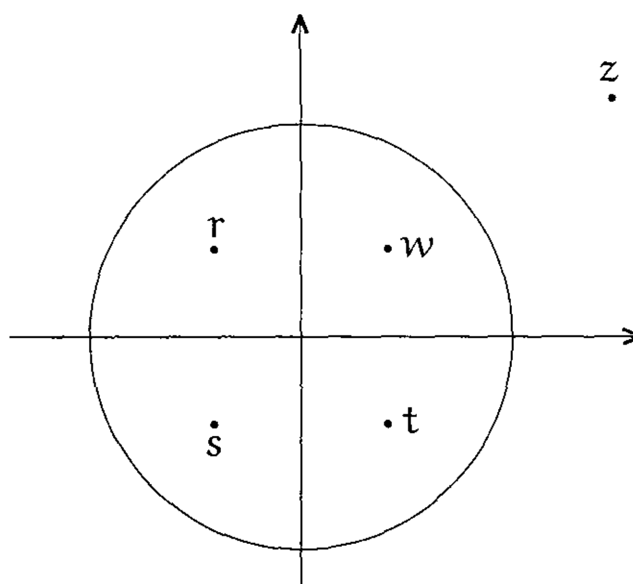



**Figura 86a**

34) Se $0 < \theta < \pi$, determine a forma trigonométrica de: a) $1 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. b) $1 - [\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta]$.

35) Mostre que o cosseno do ângulo formado pelos vetores que representam os complexos não-nulos $z$ e $w$ é igual a

$$\frac{z\overline{w} + w\overline{z}}{2 \cdot |z| \cdot |w|}.$$

36) Mostre que as imagens dos complexos $z$, $w$ e $s$ são vértices de um triângulo equilátero então $z^2 + w^2 + s^2 = zw + ws + sz$.

37) As imagens dos complexos $z$ e $w$ são vértices consecutivos de um hexágono regular. Determine o afixo do centro de hexágono.

38) Considere o quadrado definido por $0 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 1$ e $0 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 1$. Determine a imagem desse quadrado pelas funções abaixo:
a) $f(z) = 2z$. b) $f(z) = \overline{z}$. c) $f(z) = iz$. d) $f(z) = i\overline{z}$.
e) $f(z) = -z$. f) $f(z) = (1+i)z$, g) $f(z) = z + 1 - i$.
h) $f(z) = 2z + i$. i) $f(z) = (1-i)z + 2 + i$.

39) Considere a circunferência de centro (1;2) e raio 3. Determine a imagem dessa circunferência pelas funções do exercício 38.

40) Calcule o valor das somas:

a) $S_1 = 1 + \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta + \cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta + \cdots + \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta$.

b) $S_2 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$

c) $S_3 = 1 + \text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta + \cdots + \text{sen}\,n\theta$.

## 4. Raízes da Unidade

Uma estrutura interessante é dada, para cada $n$ fixo, pelas raízes $n$-ésimas da unidade. Sabemos que há exatamente $n$ raízes $n$-ésimas da unidade e que as imagens dessas raízes no plano complexo são os vértices de um polígono regular de $n$ lados com centro na origem.

Temos

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1} &= \sqrt[n]{1[\cos 0 + i\,\text{sen}\,0]}\\ &= \sqrt[n]{1}\left[\cos\frac{0+2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{0+2k\pi}{n}\right]\\ &= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n},\end{aligned}$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Fixando $n$, as raízes $n$-ésimas da unidade serão representadas por $\varepsilon_k$,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

**Exemplo 1.** As raízes cúbicas da unidade são

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Temos

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

As raízes $n$-ésimas da unidade ($n$ fixo) têm algumas propriedades interessantes.

**Propriedade 1.** O produto de duas raízes $n$-ésimas da unidade é também uma raiz $n$-ésima da unidade.

**Prova:** Se $z^n = 1$ e $w^n = 1$, $(zw)^n = z^n w^n = 1 \cdot 1 = 1$.

**Propriedade 2.** O inverso de uma raiz $n$-ésima da unidade é também uma raiz $n$-ésima da unidade.

**Prova:** Se $z^n = 1$, então $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$.

**Corolário.** *O quociente de duas raízes $n$-ésimas da unidade é também uma raiz $n$-ésima da unidade.*

As potências (de expoente inteiro) das raízes $n$-ésimas da unidade são feitas na aritmética módulo $n$. Na aritmética módulo $n$ trabalhamos com os números $0, 1, \ldots, n-1$ e as operações são feitas tomando-se o resto da divisão por $n$ do resultado da operação na aritmética usual. É bom notar que estamos habituados a fazer contas nas aritméticas módulo 12 e módulo 24. Com efeito, quando trabalhamos com horas, usamos a aritmética módulo 24 (ou eventualmente módulo 12).

**Exemplo 2.** 2 horas após as 13 horas serão 15 horas pois $13+2 = 15$. 6 horas após as 22 horas serão 4 horas pois $22+6 = 4$, módulo 24, já que $22+6 = 28$ e o resto da divisão de 28 por 24 é 4.

**Exemplo 3.** Na aritmética módulo 3, os números são 0, 1 e 2 e as tabuadas de somar e multiplicar são

| + | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 |
| **1** | 1 | 2 | 0 |
| **2** | 2 | 0 | 1 |

| × | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 |
| **2** | 0 | 2 | 1 |

Observe que $2 \times 2$ módulo 3 é igual a 1 pois $2 \times 2 = 4$ e o resto da divisão de 4 por 3 é 1.

**Exemplo 4.** Na aritmética módulo 5, os números são 0, 1, 2, 3 e 4. $3 + 4 = 2$ pois o resto da divisão de 7 por 5 é 2. O simétrico de 4, ou seja, o número que somado a 4 dá 0, é igual a 1, pois $1 + 4 = 0$ módulo 5. Portanto, $-4 = 1$ na aritmética módulo 5.

O inverso de 3, isto é, o número que multiplicado por 3 dá 1, é igual a 2, pois $2 \times 3 = 1$ módulo 5, já que $2 \times 3 = 6$ e o resto da divisão de 6 por 5 é 1. Portanto, $3^{-1} = 2$ na aritmética módulo 5.

**Exemplo 5.** Na aritmética módulo 6, $-2 = 4$, pois $4 + 2 = 0$ módulo 6, já que $4+2 = 6$ e o resto da divisão de 6 por 6 é igual a 0.

Neste caso, $5^{-1} = 5$ módulo 6, pois $5 \times 5 = 1$ módulo 6, já que $5 \times 5 = 25$ e o resto da divisão de 25 por 6 é 1.

2 não é invertível módulo 6. Se o inverso de 2 existisse e fosse igual a $x$, $2x$ seria igual a 1 módulo 6, ou seja $2x$ daria resto 1 quando dividido por 6. Isso é absurdo pois implicaria $2x - 1$ múltiplo de 6, o que é impossível por ser $2x - 1$ ímpar ao passo que os múltiplos de 6 são pares.

Na aritmética módulo $n$, a adição e a multiplicação são comutativas e associativas e a multiplicação é distributiva em relação à adição. 0 é neutro para a adição (isto é, $0 + x = x + 0 = x$ para todo $x$) e 1 é neutro para a multiplicação (isto é, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para todo $x$). Além disso todo número possui um simétrico. O simétrico de $x$ é $n - x$ pois $x + (n - x) = n$ é igual a 0 módulo $n$.

As propriedades acima são as mesmas da aritmética ordinária dos reais. Entretanto, nos reais todos os números, exceto 0, possuem inverso. Na aritmética módulo $n$, já vimos que isso não ocorre necessariamente. O Exemplo 5 mostrou que, módulo 6, o número 2 não possuía inverso. O teorema a seguir mostra que isso é devido a 6 não ser primo.

**Teorema.** *Se $n$ é primo, todos os números diferentes de zero são invertíveis na aritmética módulo $n$.*

**Prova:** Na aritmética módulo $n$, os números são $0, 1, \ldots, n - 1$. Seja $x \neq 0$ um desses números. Mostraremos que $x$ é invertível.

Consideremos, módulo $n$, os $n-1$ produtos $x \cdot 1, x \cdot 2, \ldots, x \cdot (n-$

$1)$. Nenhum deles é 0, pois se $x \cdot j = 0$ módulo $n$, com $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $x \cdot j$ seria múltiplo de $n$; como $n$ é primo, isso só seria possível com $x$ múltiplo de $n$, o que é absurdo pois $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, ou com $j$ múltiplo de $n$, o que também é absurdo pois $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Logo, o conjunto $\{x \cdot 1, x \cdot 2, \ldots, x \cdot (n-1)\}$ está contido no conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Mostraremos agora que o conjunto $\{x \cdot 1, x \cdot 2, \ldots, x \cdot (n-1)\}$ possui $n-1$ elementos, o que implicará

$$\{x \cdot 1, x \cdot 2, \ldots, x \cdot (n-1)\} = \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Isso não é óbvio pois poderia haver dois produtos $x \cdot j$ e $x \cdot k$ $(j < k)$ que fossem iguais, o que faria o conjunto ter menos do que $n-1$ elementos.

Se fosse $x \cdot j = x \cdot k$ módulo $n$, com $j, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e $j < k$, $xk - xj = x(k-j)$ seria múltiplo de $n$. Como $n$ é primo, isso só seria possível com $x$ múltiplo de $n$, o que é absurdo pois $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, ou com $k - j$ múltiplo de $n$, o que também é absurdo pois $k - j \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Logo,

$$\{x \cdot 1, x \cdot 2, \ldots, x \cdot (n-1)\} = \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

e existe no conjunto do lado esquerdo da igualdade algum elemento, digamos $x \cdot p$ que é igual a 1 módulo $n$. Mas então $p$ é o inverso de $n$.

**Teorema.** *Sejam*

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$$

*e*

$$\varepsilon_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2j\pi}{n}, \quad k, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

*duas raízes $n$-ésimas da unidade. Então, $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_{k+j}$ onde a adição é módulo $n$.*

**Prova:**

$$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j = \left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right] \cdot \left[\cos\frac{2j\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2j\pi}{n}\right]$$
$$= \cos\frac{2(k+j)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2(k+j)\pi}{n}.$$

Se $k + j = r$ módulo $n$, isso significa que $r$ é o resto da divisão de $k + j$ por $n$ ou seja, existe um inteiro $q$ tal que $k + j = qn + r$ e $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Então,

$$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j = \cos\frac{2(k+j)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2(k+j)\pi}{n}$$
$$= \cos\frac{2(qn+r)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2(qn+r)\pi}{n}$$
$$= \cos\left(2q\pi + \frac{2r\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(2q\pi + \frac{2r\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\frac{2r\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2r\pi}{n} = \varepsilon_r.$$

**Exemplo 6.** Consideremos as raízes centésimas da unidade,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{100} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{100} \quad , \ k \in \{0, 1, \ldots, 99\}.$$

$\varepsilon_{44} \cdot \varepsilon_{63} = \varepsilon_7$ pois $44 + 63 = 7$ módulo 100. $(\varepsilon_{13})^{15} = \varepsilon_{95}$ pois $15 \times 13$, isto é, $13 + 13 + \cdots + 13$ (com 15 parcelas) é igual a 95, módulo 100.

**Exemplo 7.** Sabemos que as potências de raízes $n$-ésimas da unidade são também raízes $n$-ésimas da unidade. Por exemplo, as raízes quartas da unidade são

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Essas raízes são $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = i$, $\varepsilon_2 = -1$ e $\varepsilon_3 = -i$.

As potências da raiz $\varepsilon_2 = -1$ são todas iguais a 1 ou $-1$.

As potências da raiz $\varepsilon_1 = i$ são iguais a $i$, $-1$, $-i$ ou 1.

Em ambos os casos estamos verificando o fato, já provado anteriormente, que as potências de uma raiz $n$-ésima da unidade são

também raízes $n$-ésimas da unidade. Há no entanto uma diferença fundamental entre os comportamentos de $\varepsilon_2 = -1$ e de $\varepsilon_1 = i$. As potências de $\varepsilon_1 = i$ geram todas as raízes quartas da unidade ao passo que as potências de $\varepsilon_2 = -1$ geram apenas algumas das raízes quartas da unidade.

Diremos que uma raiz $n$-ésima da unidade é primitiva quando suas potências gerarem todas as raízes $n$-ésimas da unidade.

**Exemplo 8.** As raízes quartas primitivas da unidade são $\varepsilon_1 = i$ e $\varepsilon_3 = -i$.

**Teorema.** *A raiz $n$-ésima da unidade*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

*é primitiva se e somente se $k$ e $n$ são relativamente primos.*

**Prova:** Se $k$ não é primo com $n$, a fração $\frac{k}{n}$ pode ser reduzida e termos $\frac{k}{n} = \frac{p}{q}$, com $q < n$. Então a raiz $n$-ésima da unidade

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2p\pi}{q} + i\,\text{sen}\,\frac{2p\pi}{q}$$

também é uma raiz $q$-ésima da unidade (é a raiz $q$-ésima da unidade $\varepsilon_p$). Mas então suas potências, por serem raízes $q$-ésimas da unidade, poderão ter no máximo $q$ valores distintos e não poderão dar origem a todas as $n$ raízes $n$-ésimas da unidade pois $q < n$.

Se $k$ é primo com $n$, considere as $n$ potências

$$\varepsilon_k, (\varepsilon_k)^2, \ldots, (\varepsilon_k)^n.$$

Essas $n$ potências são raízes $n$-ésimas da unidade. Como existem precisamente $n$ raízes $n$-ésimas da unidade, se essas potências forem distintas, elas serão todas as $n$ raízes $n$-ésimas da unidade. Portanto, devemos provar apenas que essas potências são todas diferentes.

Consideremos duas dessas potências, $(\varepsilon_k)^s$ e $(\varepsilon_k)^t$, com $s < t$. Se fosse $(\varepsilon_k)^s = (\varepsilon_k)^t$, teríamos

$$(\varepsilon_k)^{t-s} = 1,$$

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}\right)^{t-s} = 1$$

$$\cos\frac{2k(t-s)\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k(t-s)\pi}{n} = 1.$$

Isso implica

$$\frac{2k(t-s)\pi}{n}$$

múltiplo de $2\pi$, ou seja, $\frac{k(t-s)}{n}$ inteiro. Como $k$ é primo com $n$, $t - s$ deve ser múltiplo de $n$. Isso é absurdo pois como $t, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $s < t$, $t - s \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

**Exemplo 9.** As raízes de índice 12 da unidade são

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{12} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}.$$

São primitivas as raízes correspondentes a $k = 1, 5, 7, 11$.

# Exercícios

1) Prove que as raízes $n$-ésimas de um complexo não-nulo são obtidas multiplicando-se uma qualquer delas pelas raízes $n$-ésimas da unidade.

2) Prove que a soma das raízes $n$-ésimas da unidade $(n > 1)$ é igual a 0.

3) Prove que a soma das potências de expoente $p$ das raízes $n$-ésimas da unidade $(n > 1)$ é igual a 0 se $p$ não é múltiplo de $n$.

4) Na aritmética módulo 12, quais os números que não possuem inverso?

5) Na aritmética módulo $n$, quais os números que não possuem

inverso?

6) Na aritmética módulo 13, efetue:

a) $7+9$. b) $7 \times 9$. c) $11^{-1}$. d) $3-7$. e) $2+3$.

7) Considere as raízes de índice 34 da unidade,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{34} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{34}, \quad k = 0, 1, \ldots, 33.$$

Calcule:

a) $\varepsilon_{21} \cdot \varepsilon_{19}$. b) $(\varepsilon_{12})^{13}$. c) $(\varepsilon_{12})^{-11}$. d) $\varepsilon_4 \div \varepsilon_{25}$.

8) Quais das raízes de índice 15 da unidade,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{15} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{15}, \quad k = 0, 1, \ldots, 14,$$

são primitivas?

9) Quantas são as raízes centésimas primitivas da unidade?

10) Prove que é nula a soma dos vetores com origem no centro de um polígono regular convexo e extremidades nos vértices do polígono.

11) Sejam $p$ e $q$ inteiros positivos e seja $d$ o máximo divisor comum de $p$ e $q$. Sejam $A_p = \{z : z^p = 1\}$, $A_q = \{z : z^q = 1\}$ e $A_d = \{z : z^d = 1\}$. Prove que $A_p \cap A_q = A_d$.

12) Prove que uma raiz $n$-ésima da unidade é primitiva se e somente se ela não é raiz $p$-ésima da unidade para nenhum $p < n$.

13) Calcule as somas:

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$.

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n$.

c) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$

d) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$

e) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$

f) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots$

g) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$

h) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$

## 5. Inversão

**Definição.** Seja $k$ um número positivo e seja $O$ a origem do sistema de coordenadas. A inversão de centro $O$ e potência $k^2$ é uma transformação do plano (com a origem excluída) nele mesmo, que a cada ponto $P$ associa o ponto $P'$ tal que $P'$ e $P$ são colineares com $O$ ($P'$ e $P$ na mesma semi-reta de origem $0$) e $OP \cdot OP' = k^2$.

A obtenção do inverso de um ponto $P$ pode ser feita facilmente com régua e compasso. Na figura temos o ponto $P$ e a circunferência de centro $O$ e raio $k$, chamado de circunferência de inversão. Ligamos $P$ a $A$ (ponto de interseção da circunferência de inversão com o eixo das abcissas) e pelo ponto $Q$ de interseção da semi-reta $OP$ com a circunferência de inversão traçamos a paralela a $AP$ que interceptará $OA$ no ponto $M$. Pela semelhança dos triângulos $OAP$ e $OMQ$,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OM},$$

isto é, $OP \cdot OM = OA \cdot OQ = k^2$. Portanto, $OP'$ tem o mesmo tamanho que $OM$. Marcando esse tamanho sobre $OP$, a partir de $O$, encontramos o ponto $P'$.

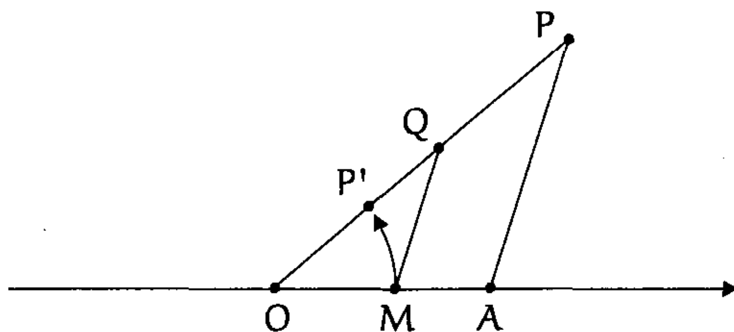



**Figura 87**

É fácil ver que:

a) Pontos exteriores à circunferência de inversão têm como inversos pontos interiores à circunferência e vice-versa.

b) Se $P'$ é o inverso de $P$, então $P$ é o inverso de $P'$.

## Coordenadas

Se $P(x, y)$, as coordenadas de $P'$ serão da forma $(tx, ty)$, com $t > 0$. Como

$$OP \cdot OP' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = t \cdot (x^2 + y^2) = k^2,$$

temos

$$t = \frac{k^2}{x^2 + y^2}.$$

Logo, se $P(x, y)$ então

$$P'\left(\frac{k^2x}{x^2 + y^2}, \frac{k^2y}{x^2 + y^2}\right).$$

A figura abaixo mostra um golfinho e o seu inverso:

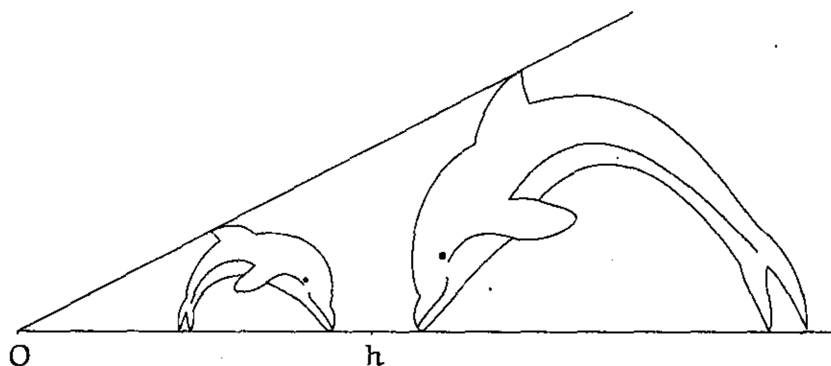



**Figura 88**

**Exemplo 1.** Na inversão de centro na origem e potência 1, o inverso do ponto (2,3) é o ponto $(2/13, 3/13)$.

## Números complexos e inversão

Se $z = x + yi$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

e

$$\frac{k^2}{\bar{z}} = \frac{k^2 x}{x^2+y^2} + \frac{k^2 y}{x^2+y^2} i.$$

Portanto, a função $f(z) = k^2/\bar{z}$ transforma cada complexo $z$ no seu inverso (centro de inversão O e potência de inversão $k^2$).

## Preservando retas e circunferências

**Teorema.** *O inverso de uma circunferência que contém o centro de inversão é uma reta, perpendicular à reta que contém o centro da circunferência e o centro de inversão.*

**Prova:**

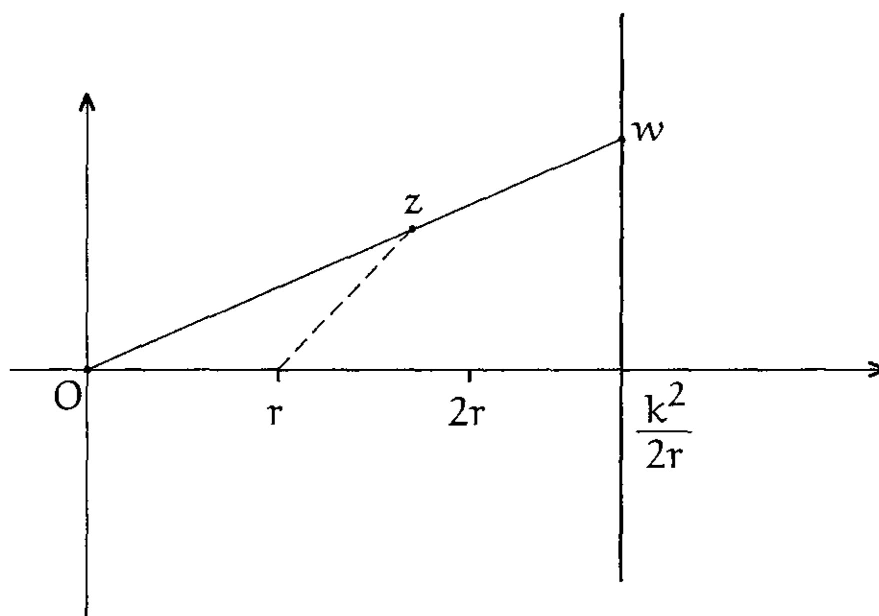



**Figura 89**

Adotando um sistema de coordenadas em que o eixo dos $x$ seja a reta que contém o centro de inversão e o centro da circunferência, se $r$ é o raio da circunferência, o centro da circunferência será $(r, 0)$. A circunferência é formada pelas imagens dos complexos $z$ tais que $|z - r| = r$.

Seja $w$ o complexo cuja imagem é o inverso da imagem de $z$. Sabemos que $w = k^2/\bar{z}\cdot$

Daí resulta $z = k^2/\bar{w}$ e o inverso da circunferência será for-

mado pelas imagens dos complexos $w$ tais que

$$\left|\frac{k^2}{\overline{w}} - r\right| = r,$$

ou seja, $|k^2 - r\overline{w}| = r|\overline{w}|$. Elevando ao quadrado e lembrando que, para todo complexo $z$, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, obtemos

$$(k^2 - r\overline{w}) \cdot (k^2 - rw) = r^2 w\overline{w}.$$

Simplificando, obtemos

$$w + \overline{w} = \frac{k^2}{r}, \quad \text{ou seja,} \quad \mathrm{Re}(w) = \frac{k^2}{2r},$$

que é a equação de uma reta perpendicular ao eixo dos $x$.

**Corolário:** *O inverso de uma reta que não contém o centro de inversão é uma circunferência em que um dos diâmetros tem como extremidades o centro de inversão e o inverso do pé da perpendicular baixada do centro de inversão à reta.*

**Prova:**

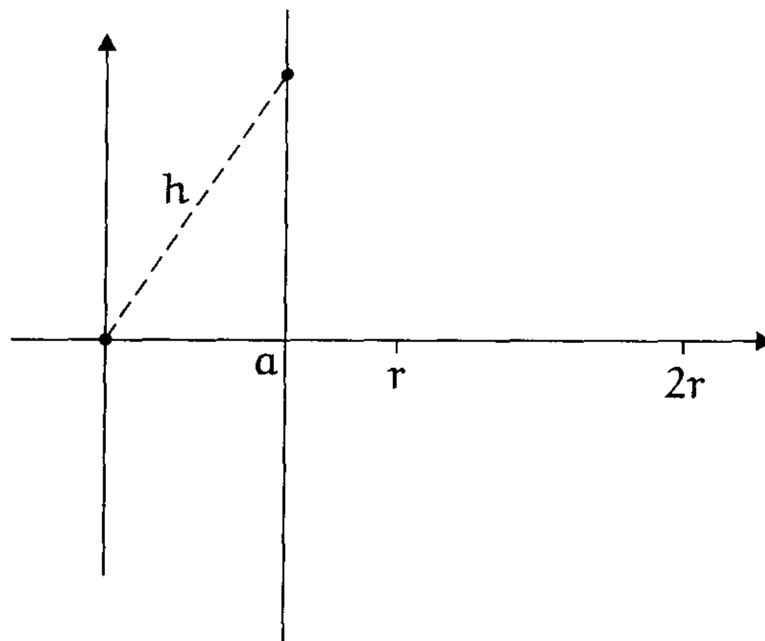



**Figura 90**

Adotando um sistema de coordenadas em que a origem seja o centro de inversão e o eixo dos $x$ seja perpendicular à reta, a equação da reta será $x = a$, com $z \neq 0$.

Tomando $r = k^2/2a$, o teorema mostra que o inverso da reta é a circunferência de centro $(r, 0)$ e raio $r$, que é uma circunferência que contém o centro de inversão $(0, 0)$ e na qual o ponto $(2r, 0)$ é a outra extremidade do diâmetro que contém $(0, 0)$. Como $2r \cdot a = k^2$, o ponto $(2r, 0)$ é o inverso do ponto $(a, 0)$.

**Teorema:** *O inverso de uma circunferência que não contém o centro de inversão é outra circunferência.*

**Prova:** Adotemos um sistema de coordenadas em que o eixo dos $x$ seja a reta que contém o centro de inversão (origem de coordenadas) e o centro da circunferência. Nesse caso o centro da circunferência será a imagem do número real $a$. A circunferência de centro $a$ e raio $r$ tem por equação $|z - a| = r$ e seu inverso terá como equação

$$\left|\frac{k^2}{\overline{w}} - a\right| = r,$$

ou seja, $|k^2 - a\overline{w}| = r|\overline{w}|$. Elevando ao quadrado e lembrando que, para todo complexo $z$, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, obtemos

$$(k^2 - a\overline{w}) \cdot (k^2 - aw) = r^2 w\overline{w}.$$

Como a circunferência não contém a origem, $a \neq r$. Simplificando, obtemos

$$(r^2 - a^2)w\overline{w} + k^2 aw + k^2 a\overline{w} - k^4 = 0,$$

ou seja,

$$w\overline{w} + \frac{k^2 a}{r^2 - a^2} w + \frac{k^2 a}{r^2 - a^2}\overline{w} - \frac{k^4}{r^2 - a^2} = 0,$$

ou ainda,

$$\left(w + \frac{k^2 a}{r^2 - a^2}\right) \cdot \left(\overline{w} + \frac{k^2 a}{r^2 - a^2}\right) = k^4 \frac{r^2}{(r^2 - a^2)^2},$$

ou finalmente,

$$\left|w - \frac{k^2 a}{a^2 - r^2}\right| = \frac{k^2 r}{|r^2 - a^2|},$$

que é uma circunferência de centro na imagem do real

$$\frac{k^2 a}{a^2 - r^2} \quad \text{e raio} \quad \frac{k^2 r}{|r^2 - a^2|}.$$

**Teorema:** *As retas que contêm o centro de inversão são suas próprias inversas.*

**Prova:** A inversa da reta $ax = by$ é a reta

$$a\,\frac{k^2 x}{x^2 + y^2} = b\,\frac{k^2 y}{x^2 + y^2},$$

ou seja, $ax = by$.

## Preservando ângulos

Uma das mais importantes propriedades da inversão é que a inversão preserva ângulos (embora reverta orientações). Mais precisamente, se duas curvas formam um ângulo $\theta$ em um ponto que não é o centro de inversão, suas inversas formam um ângulo igual a $-\theta$.

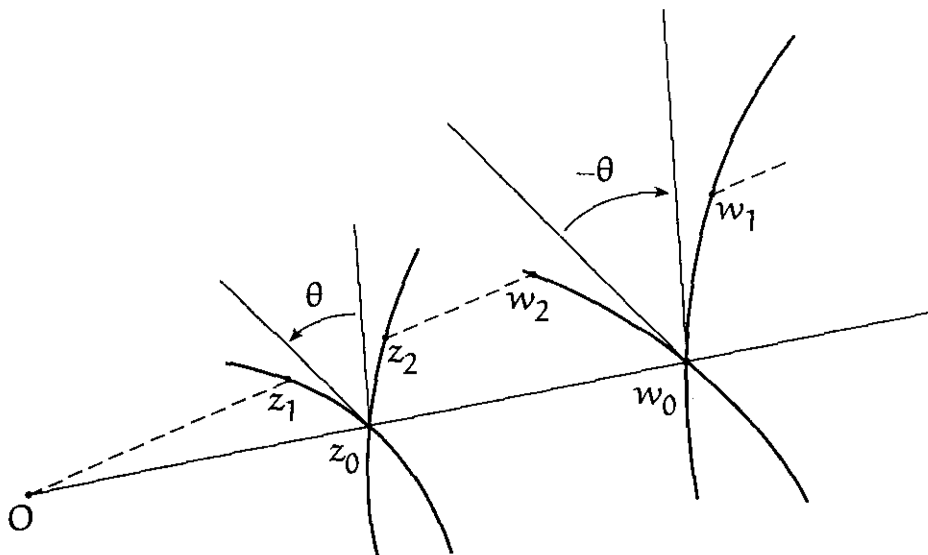



**Figura 91**

Chamado de $z_0$ o ponto de interseção das curvas e supondo $z_0 \neq 0$, tomemos pontos $z_1$ e $z_2$ nas duas curvas. O ângulo do vetor $\overrightarrow{z_0z_1}$ para o vetor $\overrightarrow{z_0z_2}$ é igual a

$$\arg(z_2 - z_0) - \arg(z_1 - z_0) = \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \cdot$$

O correspondente ângulo nas curvas inversas é

$$\frac{\dfrac{k^2}{\overline{z_2}} - \dfrac{k^2}{\overline{z_0}}}{\dfrac{k^2}{\overline{z_1}} - \dfrac{k^2}{\overline{z_0}}} = \arg\left(\frac{\overline{z_2} - \overline{z_0}}{\overline{z_1} - \overline{z_0}} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$$

$$= \arg \overline{\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right)} + \arg \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

$$= -\arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} - \arg \frac{z_1}{z_2} \cdot$$

Fazendo $z_1$ e $z_2$ tenderem para $z_0$,

$$\arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

tenderá para o ângulo $\theta$ entre as curvas e, como $z_1/z_2$ tende para $z_0/z_0 = 1$ e $\arg 1 = 0$ o ângulo entre as curvas inversas será igual a $-\theta$.

## Exercícios

1) Que pontos são seus próprios inversos?

2) A inversão é uma isometria?

3) Determine $(k = 1)$ os inversos:

   a) do ponto $(1, 0)$.

   b) do ponto $(2, 0)$.

   c) da reta $y = 2x$.

   d) da reta $x + y = 1$.

e) da circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

f) da circunferência $x^2 + y^2 = x$.

4) O inverso de uma circunferência C que não contém o centro de inversão é uma circunferência C′. O centro de C′ é o inverso do centro de C?

5) O inverso de uma circunferência C que não contém o centro de inversão é uma circunferência C′. Mostre que o centro de inversão e os centros de C e de C′ são colineares. Mostre que C′ é homotética de C em relação ao centro de inversão.

6) Mostre que invertendo os lados de um triângulo em relação a seu incentro obtemos três circunferências de mesmo raio.

7) Mostre que invertendo os vértices de um triângulo em relação a seu circuncentro obtemos um triângulo semelhante.

8) As circunferências ABC e DBC cortam-se ortogonalmente. Prove que as circunferências ADB e ADC também cortam-se ortogonalmente.

9) Descreva geometricamente as funções:

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ · b) $f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$ ·

10) Determine o inverso do ponto (1,3) sendo (2,1) o centro de inversão e 4 a potência de inversão.

11) Determine o ângulo das circunferências $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$.

Capítulo 6

# Equações Algébricas

## 1. Introdução

O objetivo desse capítulo é o estudo das equações algébricas (isto é, equações da forma $p(x) = 0$, onde $p$ é uma função polinomial). Equações desse tipo ocorrem naturalmente nas aplicações, como mostra o exemplo abaixo.

**Exemplo.** Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada, com 18 cm de lado, e dobrando-se conforme a figura, obtém-se uma caixa retangular sem tampa. Qual deve ser o lado do quadrado a ser recortado para que o volume da caixa seja igual a 400 cm$^3$?

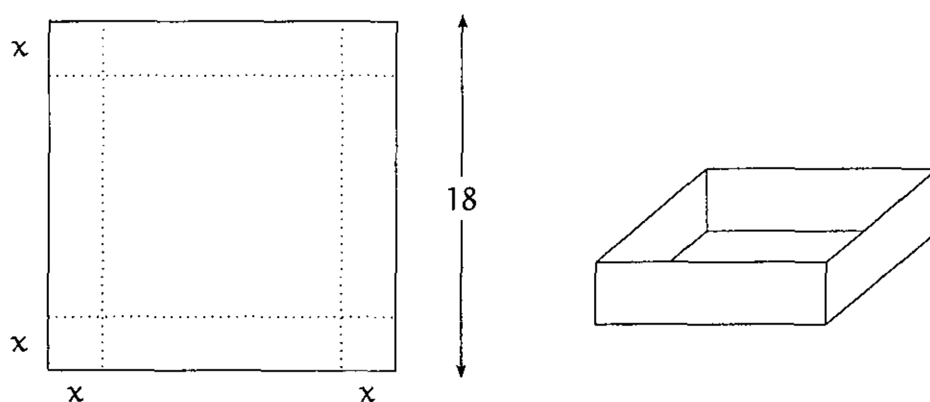



**Figura 92**

As dimensões da caixa formada quando se recorta um quadrado de lado $x$ são dadas por $18 - 2x$, $18 - 2x$ e $x$. Logo o volume da caixa é $(18 - 2x)^2 x$ e a condição estabelecida pelo problema é

expressa pela equação

$$(18 - 2x)^2 x = 400$$

ou, equivalentemente,

$$4x^2 - 72x^2 + 324x - 400 = 0$$

ou, ainda

$$x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0.$$

Embora a resolução de equações algébricas do segundo grau fosse dominada desde a Antiguidade, somente na época do Renascimento foram alcançados os primeiros resultados relativos a equações de grau superior a 2. A busca por métodos algébricos gerais de solução para tais equações foi responsável por grandes desenvolvimentos da Matemática, incluindo a invenção dos números complexos. Como veremos posteriormente, números complexos podem aparecer como resultados intermediários na fórmula de resolução da equação do 3º grau, ainda que as raízes sejam reais. Mas o principal papel dos números complexos não é computacional e sim estrutural: a consideração das raízes complexas no estudo das equações algébricas permite uma teoria muito mais elegante do que a possível considerando apenas as raízes reais (ainda que possamos estar interessados somente em raízes reais, como no problema descrito acima). Isso não é incomum em Matemática: muitas vezes, a abordagem mais geral de um problema, ao invés de torná-lo mais difícil, permite revelar estruturas importantes que estavam indisponíveis ou escondidas no caso mais particular.

Para que possamos levar os números complexos a desempenhar seu papel no estudo das equações algébricas, devemos rever nosso estudo sobre polinômios reais, realizado no Volume 1 desta série, mas agora considerando polinômios complexos. Como veremos, praticamente nenhuma alteração no tratamento de polinômios reais é necessária para lidar com polinômios complexos.

## 2. Polinômios Complexos

Uma função $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função polinomial complexa quando existem números complexos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são os *coeficientes* da função polinomial. Se $a_n \neq 0$, dizemos que $p$ tem *grau* $n$. Se um número complexo $\alpha$ é tal que $p(\alpha) = 0$, dizemos que $\alpha$ é *raiz* de $p$. Um caso de especial interesse é aquele em que os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são todos números reais. Nesse caso, a restrição de $p$ ao conjunto dos reais determina uma função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Como nosso interesse final é o estudo de tais funções, a maior parte dos nossos exemplos serão de funções polinomiais complexas com coeficientes reais. É importante, porém, estar atento para o fato de que estamos considerando tais funções como definidas no conjunto dos complexos.

**Exemplo.** Seja $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $p(x) = x^2 + 1$. A restrição de $p$ para $\mathbb{R}$ é a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$. Evidentemente, $f(x) > 0$ para todo $x$, o que mostra que $f$ não tem raízes e que $p$ não tem raízes reais. Mas $p$ é definida em todo o conjunto dos números complexos. Em particular $p(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. Portanto $i$ é uma raiz complexa de $p$.

Somas e produtos de funções polinomiais complexas são, também, funções polinomiais complexas. No caso particular de ambas as funções terem todos os seus coeficientes reais, a soma e o produto também têm coeficientes reais. É fácil verificar que, se $p$ e $q$ são funções polinomiais, então o grau de $p + q$ é menor do que ou igual ao maior entre os graus de $p$ e $q$, enquanto o grau de $pq$ é a soma dos graus de $p$ e $q$. Quando uma função polinomial $p$ pode ser expressa como o produto $p = qr$ das funções polinomiais $q$ e $r$, dizemos que $p$ é *divisível* por $q$ e $r$.

**Exemplo.** A função polinomial $p(x) = x^n - \alpha^n$ é divisível por $x - \alpha$, onde $\alpha$ é um número complexo qualquer.

Basta verificar que

$$x^n - \alpha^n = (x-\alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}).$$

O exemplo acima é um caso particular do teorema fundamental a seguir.

**Teorema:** *Se o número complexo $\alpha$ é raiz de uma função polinomial $p$, então $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$.*

**Demonstração:** Como $p(\alpha) = 0$, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(\alpha) \\ &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) - \\ &\quad - (a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha - a_0) \\ &= a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x-\alpha). \end{aligned}$$

Como vimos no exemplo anterior, cada uma das parcelas da expressão acima é divisível por $x-\alpha$. Logo $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$; isto é, existe um polinômio $q$ tal que $p(x) = q(x)(x-\alpha)$.

De modo mais geral, se os números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial $p$ de grau $n$, então existe uma função polinomial $q$ de grau $n-k$ tal que

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x).$$

Em conseqüência, *uma função polinomial complexa de grau $n$ pode ter, no máximo, $n$ raízes.*

Concluímos também que uma função polinomial não pode ser nula para todo valor de $x$, a menos que todos os seus coeficientes sejam nulos. Isto é $p$ deve ser da forma $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots$.

De fato, se algum coeficiente de $p$ fosse não-nulo, então $p$ teria um coeficiente $a_n$ não-nulo de índice máximo; ou seja, teria grau $n$ para algum valor de $n$. Portanto, $p$ teria no máximo $n$ raízes, o que contradiz o fato de $p$ se anular para todos os valores de $x$.

A função polinomial $p$ tal que $p(x) = 0$ para todo $x$ é chamada de *função polinomial identicamente nula*. Observe que, de

acordo com nossa definição, $p$ não possui grau, por não possuir nenhum coeficiente não nulo. No entanto, é conveniente considerar que seu grau é $-\infty$. Esta convenção permite, por exemplo, que incluamos o polinômio identicamente nulo quando nos referimos aos polinômios de grau menor que ou igual a $n$. Como veremos a seguir, isso torna mais simples o enunciado de diversos teoremas.

Tomemos agora duas funções polinomiais $p$ e $q$. Para que $p$ e $q$ sejam iguais (isto é, sejam tais que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$), sua diferença $p - q$ tem que ser identicamente nula. Mas, como vimos acima, isso ocorre somente se todos os coeficientes de $p - q$ são nulos; portanto, *duas funções polinomiais* $p$ *e* $q$ *são iguais se, e somente se,* $p$ *e* $q$ *têm coeficientes respectivamente iguais.*

Até esse momento, temos falado exclusivamente em funções polinomiais complexas e não em polinômios complexos. Convém relembrar que há uma diferença sutil entre um polinômio e uma função polinomial, já mencionada no Volume 1 dessa série.

Chamamos de *polinômio* complexo a uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 ,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números complexos e $X$ é um símbolo, chamado de indeterminada. Quando dizemos "expressão formal" queremos dizer que, essencialmente, vemos um polinômio como a lista ordenada $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de seus coeficientes e que somamos e multiplicamos polinômios através das regras usuais de multiplicação de monômios e adição de monômios semelhantes. Em particular, dizemos que dois polinômios são iguais quando possuem exatamente os mesmos coeficientes. A todo polinômio complexo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

corresponde uma função polinomial complexa $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 .$$

Note que o conceito de polinômio contempla apenas a lista de seus coeficientes e a forma pela qual os somamos e multiplicamos; quando nos referimos à função polinomial, passamos a estar interessados na correspondência entre números complexos estabelecida pelo valor que a função assume em cada ponto. É claro que a todo polinômio corresponde uma única função polinomial; por outro lado, vimos acima que duas funções polinomiais só são iguais quando têm a mesma lista de coeficientes. Em outras palavras, duas funções polinomiais só são iguais quando os polinômios a elas associados são iguais. Assim, a uma função polinomial também corresponde um único polinômio. Desse modo, existe uma correspondência bi-unívoca entre funções polinomiais e polinômios, o que nos permite, sem risco de confusão, nos referirmos indistintamente ao polinômio $p$ ou à função polinomial $p$. É conveniente muitas vezes nos referirmos a um "polinômio $p(x)$", especialmente em situações em que outros polinômios apareçam descritos apenas por sua expressão.

**Exemplo.** Verificar se o polinômio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$ é divisível por $2x + 1$.

A discussão anterior faz com que seja indiferente pensarmos nos polinômios ou nas funções polinomiais a eles associadas. Isto é, tanto podemos pensar em verificar a existência de um polinômio $q$ tal que

$$p(x) = (2x + 1)q(x)$$

ou em verificar a existência de uma função polinomial $q$ para a qual a igualdade acima seja satisfeita para todo valor complexo de $x$.

De qualquer modo, a igualdade requer coeficientes idênticos dos dois lados da igualdade. Observamos inicialmente que, caso exista o polinômio $q$, ele deve ser do 2º grau, da forma $q(x) = ax^2 + bx + c$. Isto é, procuramos números $a$, $b$ e $c$ tais que:

$$2x^3 + 3x^2 - x - 1 = (2x + 1)(ax^2 + bx + c).$$

Efetuando o produto do lado direito, obtemos:

$$2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 2ax^3 + (a + 2b)x^2 + (b + 2c)x + c.$$

Portanto, deve-se ter:

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \\ a + 2b &= 3 \\ b + 2c &= -1 \\ c &= -1. \end{aligned}$$

Na 1ª equação, obtemos $a = 1$. Substituindo na 2ª , vem $b = 1$. Finalmente, da 3ª vem $c = -1$. Como a 4ª equação é satisfeita por esses valores, concluímos que a resposta é afirmativa. Isto é, $p(x)$ é divisível por $(2x + 1)$ e $q(x) = x^2 + x - 1$.

O método de resolução do problema anterior é conhecido como *método dos coeficientes a determinar*; através dele, polinômios satisfazendo a determinadas condições são obtidos, usando o fato de que igualdade de polinômios ou funções polinomiais requer igualdade de todos os respectivos coeficientes. Como veremos a seguir, a resposta à pergunta formulada no exemplo acima poderia também ser obtida através do algoritmo de divisão de polinômios, estudado na próxima seção.

## 3. Divisão de Polinômios

O conceito de divisibilidade entre polinômios desempenha um papel relevante no estudo de suas raízes. Se um polinômio $p$ pode ser escrito como o produto $p = p_1 p_2$ de dois polinômios $p_1$ e $p_2$, então um complexo $\alpha$ é raiz de $p$ se, e somente se, $\alpha$ é a raiz de $p_1$ ou raiz de $p_2$, já que

$$p_1(x)\, p_2(x) = 0 \Rightarrow p_1(x) = 0 \quad \text{ou} \quad p_2(x) = 0.$$

Consideremos, então, a seguinte questão: dados polinômios D e d, como verificar se D é divisível por d? Uma alternativa é repetir o que fizemos no exemplo do final da última seção e verificar a

divisibilidade de D e d tentando encontrar os coeficientes de um polinômio q tal que $D = dq$.

Uma outra alternativa é olharmos o problema de um ponto de vista mais geral, que nos leva a um processo algorítmico de *divisão de polinômios*, através do qual podemos obter q ou demonstrar que D não é divisível por d. Isso é inteiramente análogo ao que ocorre com os números inteiros: a forma mais prática de verificar se o número 129.341 é divisível por 117 consiste em efetuar a divisão e verificar se o resto é ou não igual a zero.

Convém começar recordando o conceito de divisão de números inteiros. Dado um inteiro dividendo D e um inteiro divisor $d \neq 0$, dividir D por d consiste em encontrar inteiros q e r (onde $0 \leqslant r \leqslant |d| - 1$), chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão, que cumpram $D = dq + r$. É possível demonstrar que q e r existem e são únicos.

Da mesma forma, dividir um polinômio complexo D por um polinômio complexo d não identicamente nulo consiste em obter polinômios complexos q e r, chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão, que cumpram:

$$(*) \qquad \text{grau}(r) < \text{grau}(d) \quad \text{e} \quad D = dq + r.$$

(Este é um exemplo de situação em que tiramos partido da convenção a respeito do grau do polinômio nulo. Se não a tivéssemos adotado, seríamos obrigados a dizer que r deve ser identicamente nulo ou possuir grau menor que o de d.)

**Teorema:** *O quociente e o resto da divisão de um polinômio* D *por um polinômio* d *(não identicamente nulo) existem e são únicos.*

**Demonstração:** Comecemos com a unicidade. Suponhamos que existam dois pares de polinômios $(q_1, r_1)$ e $(q_2, r_2)$ satisfazendo a definição de divisão de D por d. Isto é:

$$D = dq_1 + r_1$$
$$D = dq_2 + r_2.$$

Temos

$$dq_1 + r_1 = dq_2 + r_2$$

e

$$d(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 .$$

O polinômio do lado direito tem grau menor que o grau de d, por ser a diferença de dois polinômios de grau menor do que o grau de d. Já o polinômio da esquerda tem grau maior ou igual ao de d, a menos que $(q_1 - q_2)$ seja identicamente nulo. Logo, a identidade ocorre somente quando os polinômios em ambos os lados são identicamente nulos. Portanto, temos, necessariamente, $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Para a demonstração da existência, empregaremos um processo algorítmico através do qual reduziremos sucessivamente o grau do dividendo até que ele se torne menor que o do divisor e a divisão se torne imediata. Note que, se D tem grau menor que d, então certamente D pode ser dividido por d, já que $q = 0$ e $r = D$ cumprem as condições em (*). Suponhamos, então, que D tenha grau $n$ e d tenha grau $m$. Se $m > n$, não há nada a fazer: o quociente da divisão é $q = 0$ e o resto é $r = D$. Caso contrário, consideremos os termos $a_0x^n$ e $b_mx^m$, que são os termos de mais alto grau em D e d, respectivamente. Seja $r_1$ o polinômio definido por

$$r_1(x) = D(x) - (a_n/b_m)x^{n-m}d(x).$$

(Note que $r_1$ é obtido subtraindo de D o resultado da multiplicação de d pelo quociente dos termos de mais alto grau de D e d; $r_1$ é chamado de *primeiro resto parcial* no processo de divisão, por motivos que se tornarão claros a seguir).

Observe que

$$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x)$$

é um polinômio de grau $n$ cujo termo de mais alto grau é igual ao termo de mais alto grau $a_nx^n$ de D. Logo $r_1$ tem grau no máximo igual a $n-1$. Não sabemos ainda se $r_1$ pode ser dividido por d; isto

é, se existem polinômios $q_1$ e $r$ (com grau $(r) <$ grau $(d)$) tais que $r_1 = q_1 d + r$. Mas, se tais polinômios existirem, então D também pode ser dividido por d, já que teremos

$$\begin{aligned} D(x) &= (a_n/b_m)x^{n-m}d(x) + r_1(x) \\ &= (a_n/b_m)x^{n-m}d(x) + q_1(x)d(x) + r(x) \\ &= ((a_n/b_m)x^{n-m} + q_1(x))d(x) + r(x). \end{aligned}$$

Isto é, o resto é o mesmo que na divisão de $r_1$ por d, enquanto o quociente é obtido somando ao polinômio q, cujo grau é no máximo $n - m - 1$, o termo

$$\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Desta forma, reduzimos o problema de dividir D por d ao de dividir $r_1$ por d, onde $r_1$ tem grau mais baixo. Mas podemos aplicar o mesmo processo a $r_1$, obtendo um novo resto parcial $r_2$ e assim por diante, sempre obtendo um polinômio de grau inferior ao do anterior. Após um número finito de passos, obteremos um resto parcial $r_k$ de grau menor que m, para o qual a divisão é possível e imediata: o quociente é $q_k = 0$ e o resto é $r = r_k$. Retornando sobre nossos passos, concluímos que cada resto parcial pode ser dividido por d. O resto da divisão original é igual ao último resto parcial $r_k$ e o quociente é formado colecionando os termos obtidos em cada passo.

Assim, temos uma prova de que é possível dividir D por d e, simultaneamente, um processo para executar a divisão em um número finito de passos. Toda a discussão acima é válida para polinômios complexos. No entanto, se todos os coeficientes de D e d são reais, então todos os coeficientes gerados no processo são obtidos através de operações envolvendo somente com números reais e são, portanto, reais. Logo, o quociente e o resto da divisão de um polinômio real por outro são também polinômios reais.

**Exemplo.** Dividir $2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ por $x^2 + 1$.

Temos $D(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1, \quad d(x) = x^2 + 1.$

$$\begin{aligned}
r_1(x) &= D(x) - (2/1)x^2\,d(x)\\
&= (2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1) - 2x^2(x^2 + 1)\\
&= x^3 - 5x^2 + 2x - 1\\
r_2(x) &= r_1(x) - (1/1)x\,d(x)\\
&= (x^3 - 5x^2 + 2x - 1) - x(x^2 + 1)\\
&= -5x^2 + x - 1\\
r_3(x) &= r_2(x) - (-5/1)d(x)\\
&= (-5x^2 + x - 1) - (-5)(x^2 + 1)\\
&= x + 4.
\end{aligned}$$

Como $r_3(x)$ tem grau menor que o de $d(x)$, o processo está terminado, com o quociente $q(x) = 2x^2 + x - 5$ e o resto $r(x) = x + 4$. Usualmente, dispomos os cálculos na forma mostrada abaixo.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +x^3 & -3x^2 & +2x & -1 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & -2x^2 & & & 2x^2+x-5 \\ \cline{1-3}
 & x^3 & -5x^2 & +2x & -1 & \\
 & -x^3 & & -x & & \\ \cline{2-5}
 & & -5x^2 & +x & -1 & \\
 & & 5x^2 & & +5 & \\ \cline{3-5}
 & & & x & +4 &
\end{array}$$

A introdução do algoritmo de divisão de polinômios oferece uma boa oportunidade para rever o algoritmo de divisão de inteiros e levar os alunos (muitas vezes pela primeira vez) a entender seu funcionamento. A idéia é a mesma do algoritmo acima: reduzir o dividendo, até que o quociente seja 0 e o resto seja igual ao próprio dividendo. Na divisão de polinômios, reduzimos, em cada passo, o grau do dividendo; na divisão de inteiros, reduzimos o número de algarimsmos do dividendo. Para ilustrar, consideremos a divisão

de 3971 por 17

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3 & 9' & 7' & 1' & 17 \\ \cline{5-5}
-3 & 4 & & & 233 \\ \cline{1-3}
 & 5 & 7 & & \\
 & -5 & 1 & & \\ \cline{2-4}
 & & 6 & 1 & \\
 & & -5 & 1 & \\ \cline{3-4}
 & & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Acompanhemos cada passo do processo acima. O algoritmo começa com uma estimativa do número de algarismos do quociente. Quando "separamos" as duas primeiras casas de 3971, estamos concluindo que o resultado terá 3 algarismos. O primeiro algarismo do quociente corresponde ao maior inteiro $k$ tal que o produto de 17 pelo inteiro representado por $k00$ seja menor que 3971. Isto é equivalente a determinar o maior valor de $k$ para o qual $17k \leqslant 39$, que é igual a 2.

Obtemos, assim, a parcela 200 do quociente e fazemos

$$r_1 = D - 200 \times 17 = 3971 - 3400 = 571.$$

Reduzimos, então, nosso problema ao de dividir 571 por 17. O próximo algarismo corresponde ao maior inteiro $k$ tal que o produto de 17 pelo inteiro representado por $k0$ seja menor que 571. Deve-se ter, então, $17k \leqslant 57$, e portanto, o maior valor possível para k é 3. (Note que, nesse passo, apenas os dois primeiros algarismos do resto parcial 571 são relevantes. Essa é a razão de "baixarmos" apenas o próximo algarismo do dividendo em cada passo.) Obtemos, assim, a parcela 30 do quociente e fazemos

$$r_2 = r_1 - 30 \times 17 = 571 - 510 = 61.$$

O problema agora é dividir 61 por 17. O maior valor de $k$ para o qual $17k \leqslant 61$ é 3. Logo, a última parcela do quociente é 3 e o último resto parcial é $r_3 = 61 - 3 \times 17 = 61 - 51 = 10$, que é menor que 17. O quociente desejado é então $q = 200 + 30 + 3 = 233$ e o resto é 10.

## 4. Divisão de um polinômio por $(x - a)$

O caso mais importante de divisão de polinômios é aquele em que o divisor é da forma $(x - a)$. Como vimos anteriormente, sempre que um número $a$ é identificado como uma raiz de um polinômio $p(x)$, podemos concluir que $p(x)$ é divisível por $(x - a)$. O teorema da divisão oferece um outro modo de chegar à mesma conclusão. De fato, ao dividir um polinômio qualquer por $(x - a)$ obtemos um resto $q(x)$ e um resto $r(x) = r_0$, satisfazendo $p(x) = (x - a)q(x) + r_0$. Calculando o valor numérico de ambos os lados para $x = a$, obtemos $p(a) = r_0$.

Assim, o *resto da divisão de um polinômio* $p(x)$ *por* $(x - a)$ *é (o polinômio constante) igual a* $p(a)$. Em particular, concluímos (novamente) que um *número* $a$ *é raiz de* $p(x)$ *se, e somente se,* $p(x)$ *é divisível por* $x - a$.

A divisão de um polinômio por divisores da forma $(x - a)$ é parte integrante do processo de resolução de equações algébricas: uma vez se tendo encontrado uma raiz $a$ de $p(x)$, a divisão de $p(x)$ por $(x - a)$ permite obter um polinômio de menor grau cujas raízes são as demais raízes de $p(x)$. Vejamos como executar, de modo eficiente, a divisão de um polinômio por fatores da forma $(x - a)$.

Consideremos um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Sejam

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

e $r(x) = r_0$ o quociente e o resto, respectivamente, da divisão de $p(x)$ por $(x - a)$. Dessa forma, temos $p(x) = q(x)(x - a) + r_0$. Desenvolvendo a expressão do lado direito segundo as potências de $x$, obtemos:

$$\begin{gathered} b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + \\ +(b_{n-3} - ab_{n-2})x^{n-2} + \cdots + (b_0 - ab_1)x + (r_0 - ab_0). \end{gathered}$$

Igualando os coeficientes aos dos termos respectivos de p, obtemos:

$$b_{n-1} = a_n$$

(esta equação permite calcular o coeficiente do termo de mais alto grau de q)

$$b_{n-2} - ab_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$$

(exprime o próximo coeficiente de q em função do obtido na equação anterior)

$$b_{n-3} - ab_{n-2} = a_{n-2} \Rightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_0 - ab_1 = a_1 \Rightarrow b_0 = a_1 + ab_1$$

(aqui encontramos o último coeficiente de q)

$$r_0 - ab_0 = a_0 \Rightarrow r_0 = a_0 + ab_0$$

(e aqui o resto da divisão).

Como os cálculos e comentários acima mostram, temos um processo recursivo para obter sucessivamente os termos de q, a partir do termo de mais alto grau, e o resto da divisão. Evidentemente, poderíamos ter chegado à mesma conclusão acompanhando, passo-a-passo, o algoritmo genérico de divisão com o divisor da forma $x - a$.

Os cálculos descritos acima são facilmente efetuados quando dispostos na forma abaixo, que constitui o chamado *dispositivo de Briot-Ruffini*.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $\cdots$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
| $a$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $b_{n-3}$ | $\cdots$ | $b_1$ | $b_0$ | $r$ |

**Exemplo.** Dividir $x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ por $x - 2$.

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | $-2$ | $-5$ |
| 2 | | $2 \times 1 + 3 =$ | $2 \times 5 + (-2) =$ | $2 \times 8 - 5 =$ |
| | 1 | 5 | 8 | 11 |

O quociente é $q(x) = x^2 + 5x + 8$ e o resto é $r(x) = 11$.

O processo prático de divisão por $(x - a)$ permite também o cálculo rápido da divisão por um polinômio na forma fatorada, como mostra o exemplo abaixo.

**Exemplo.** Dividir $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5$ por $(x - 1)(x + 2)$.

Dividimos $p(x)$ sucessivamente por $x - 1$ e $x + 2$, empregando o algoritmo de Briot-Ruffini

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | $-3$ | 1 | 0 | $-5$ |
| 1 | 2 | $-1$ | 0 | 0 | $-5$ |
| $-2$ | 2 | $-5$ | 10 | $-20$ | |

Do resultado da divisão, concluímos que

$$p(x) = (2x^3 - x^2)(x - 1) - 5$$

e

$$(2x^3 - x^2) = (2x^2 - 5x + 10)(x - 2) - 20$$

Substituindo a segunda identidade na primeira, obtemos

$$p(x) = ((2x^2 - 5x + 10)(x - 2) - 20)(x - 1) - 5$$

e finalmente

$$p(x) = (2x^2 - 5x + 10)(x - 2)(x - 1) - 20(x - 1) - 5.$$

Logo, o quociente é

$$q(x) = 2x^2 - 5x + 10\,,$$

que é obtido ao final da segunda divisão e o resto é $r(x) = -20(x-1)-5 = -20x+15$.

Um sub-produto importante do algoritmo de Briot-Ruffini é fornecer uma forma alternativa de cálculo para o valor numérico de um polinômio para $x = a$, já que o resto obtido na divisão de $p(x)$ por $(x-a)$ é igual a $p(a)$. Os cálculos feitos pelo algoritmo correspondem a escrever um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

na forma

$$\begin{aligned} p(x) &= (a_n x^{n-1} + a_n x^{n-2} + \cdots + a_1)x + a_0 \\ &= ((a_n x^{n-2} + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\ &\ \ \vdots \\ &= ((\ldots(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots)x + a_1)x + a_0 . \end{aligned}$$

De fato, cada coeficiente no algoritmo de Briot-Ruffini corresponde ao resultado parcial de um nível de parênteses quando se calcula $p(a)$ conforme indicado acima.

Na realidade, o processo de cálculo induzido por essa representação (e pelo algoritmo de Briot-Ruffini) é mais eficiente do que estamos acostumados a utilizar e que envolve o cálculo das sucessivas potências de $x$. Essa superioridade se reflete em termos de um menor número de operações envolvidas e de uma maior precisão no resultado.

**Exemplo.** Dado

$$P(x) = x^3 - 10000x^2 - 10002x + 9999,$$

calcular $P(10001)$.

Usar o método de Briot-Ruffini para calcular $P(10001)$ é equivalente a escrever $P$ na forma abaixo e efetuar as operações na ordem indicada pelos parênteses:

$$P(x) = \big((x - 10000)x - 10002\big)x + 9999.$$

Em uma calculadora, este cálculo pode ser feito armazenando $x$ na memória e acumulando os resultados das sucessivas somas e multiplicações. Em geral, mesmo as calculadoras mais simples possuem uma tecla MS ("memory storage"), que armazena o número que está no visor na memória e uma tecla MR ("memory recall"), que recupera o número armazenado na memória e o traz para o visor. Em uma tal calculadora, a seqüência de cálculo pode ser feita assim:

| Teclas | Visor | Comentários |
|---|---|---|
| 10001 MS | 10001 | armazena 10001 na memória |
| -10000= | 1 | calcula resultado da expressão no primeiro nível de parênteses |
| × MR = | 10001 | recupera 10001 da memória e multiplica pelo resultado nos parênteses |
| -10002 = | -1 | calcula resultado do segundo nível de parênteses |
| × MR = | -10001 | recupera 10001 da memória e multiplica pelo resultado nos parênteses |
| +9999 = | -2 | resultado final |

O resultado é $P(10001) = 2$.

Vejamos o que ocorreria se utilizássemos o processo convencional. Para começar, teríamos que calcular separadamente cada potência de 10001, o que envolveria, na maior parte das calculadoras, um trabalho muito maior para executar as multiplicações sucessivas. Além disso, poderíamos ter problemas de precisão. Toda calculadora tem um número máximo de dígitos significativos com que ela é capaz de operar. Se este limite é superado ocorre um erro ou, na melhor das hipóteses, uma perda de precisão. Vamos supor que estamos uma calculadora científica capaz de manter até 10 dígitos de precisão (note que, usando o método acima não tivemos nenhum número com mais de 5 algarismos).

O problema com o método usual ocorre ao calcular $10001^3$. O resultado é o número de 13 dígitos $1.000.300.030.001$, que não pode ser armazenado exatamente; o resultado do cálculo é indicado na calculadora como $1,00030003e+12$, que significa $1,00030003 \times 10^{12}$ ou $1.000.300.030.000$. Assim, há um erro igual a 1 no cálculo do primeiro termo do polinômio.

O número de algarismos do segundo termo também excede o número máximo de algarismos significativos. Nesse caso, porém, não há problema porque

$$-10000 \times 10001^2 = -1.000.200.010.000,$$

que, por possuir apenas 9 algarismos significativos, pode ser armazenado corretamente. Os demais termos são $-10002 \times 10001 = 100.030.002$ e $-9999$, que não trazem problemas.

Acumulando todos os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} P(10001) &= 1.000.300.030.000 - 1.000.200.010.000 + 100.030.002 + 9999 \\ &= 1. \end{aligned}$$

O resultado correto, como vimos é $P(10001) = 2$. Assim, além de ser mais trabalhoso, o método convencional é mais sujeito a erros numéricos, já que seus resultados parciais com freqüência envolvem números cuja representação exata excede o número de dígitos da calculadora ou computador utilizado para efetuar os cálculos.

## 5. Reduzindo o grau de uma equação algébrica

Dissemos anteriormente que a divisão por fatores de $x - a$ é parte integrante do processo de resolução de equações algébricas. Vamos, agora, discutir essa afirmativa com mais detalhes. Uma vez mais, lembramos que se $a$ é raiz do polinômio $p$ de grau $n$, então $p$ é divisível por $x - a$; isto é, existe um polinômio $q$ de grau $n - 1$ tal que $p(x) = (x-a)q(x)$. Um número complexo é raiz de $p$ se e só se é igual a $a$ ou é uma raiz de $q$. Logo, uma vez encontrada, por algum processo, uma raiz de $p$, podemos reduzir o problema original ao

de encontrar as raízes de $q(x) = 0$, onde o grau de $q$ é uma unidade inferior ao grau de $p$. É claro que a redução acima depende de se encontrar uma raiz de $p$; é claro, também, que nada garante que a nova equação seja de simples resolução. No entanto, veremos a seguir algumas situações em que isso é tudo de que necessitamos para resolver equações.

**Exemplo.** Resolver a equação $x^3 + 4x^2 - 2x - 3 = 0$.

A equação acima é um exemplo de equação que pode ser resolvida "por inspeção". O observador atento notará que a soma dos coeficientes da equação é igual a 0. Isto indica que 1 é raiz (moral da história: convém ser um observador atento pelo menos para a ocorrência de raízes iguais a 0, 1 e $-1$ nas equações).

Podemos, então, dividir $x^3 + 4x^2 - 2x - 3$ por $x - 1$, usando o algoritmo de Briot-Ruffini, de modo a obter uma equação de menor grau

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | −2 | −3 |
| 1 | 1 | 5 | 3 | 0 |

O resultado da divisão é $x^2+5x+3$. Devemos então resolver a equação $x^2+5x+3 = 0$. Como se trata de uma equação do 2º grau, ela pode ser resolvida sem dificuldades, fornecendo as raízes

$$\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-5-\sqrt{13}}{2}.$$

Logo, a equação original tem raízes

$$1, \quad \frac{-5+\sqrt{13}}{2}, \quad \text{e} \quad \frac{-5-\sqrt{13}}{2}.$$

**Exemplo.** Cortando-se quadrados de lado 4 cm nos cantos de uma folha quadrada de papelão de 18 cm de lado e dobrando conforme a figura, formamos uma caixa sem tampa cujo volume é igual 400 $cm^3$. Existe algum outro valor do lado do quadrado a ser recortado

em cada canto para o qual o volume da caixa resultante também seja igual a 400 $cm^3$?

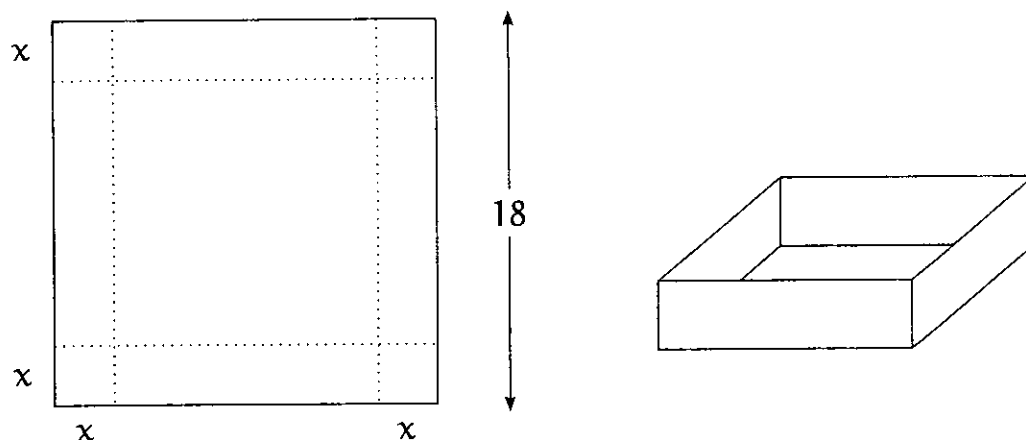



**Figura 93**

Nosso problema é resolver a equação

$$(18-2x)^2x = 400$$

ou equivalentemente

$$x^3 - 19x^2 + 81x - 100 = 0,$$

com a qual iniciamos este capítulo. Mas agora nossa tarefa é muito mais simples: já sabemos que cortando quadrados de lado 4 obtemos uma caixa de volume 400. Portanto, sabemos que 4 é uma raiz da equação. Isso não responde diretamente à nossa pergunta (queremos saber sobre a possibilidade de um outro tamanho para o quadrado a ser cortado), mas podemos eliminar a raiz conhecida e reduzir a equação a uma outra que saibamos resolver. Usando o algoritmo de Briot-Ruffini para dividir $x^3 - 18x^2 + 81x - 100$ por $x - 4$, temos

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −18 | 81 | −100 |
| 4 | 1 | −14 | 25 | 0 |

Logo, a equação se reduz a

$$x^2 - 14x + 25 = 0,$$

com raízes dadas por $7 \pm 2\sqrt{6}$. Como o lado $x$ do quadrado a ser recortado deve satisfazer $0 < x < 9$, concluímos que apenas a raiz $7 - 2\sqrt{6}$, que fornece uma dimensão aproximada de 2,1 cm para o lado do quadrado a ser recortado, atende as condições do problema.

## 6. O Teorema Fundamental da Álgebra

Como já vimos, se os números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial $p$ de grau $n$, então existe uma função polinomial $q$ de grau $n - k$ tal que

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)q(x).$$

O polinômio $q(x)$ não pode ser divisível por nenhum novo fator da forma $(x - \alpha)$, com $\alpha$ diferente de todos os $\alpha_i$; do contrário, $\alpha$ também seria raiz de $p$. Por outro lado, $q(x)$ pode ainda ser divisível por um ou mais dos fatores $(x - \alpha_i)$. Suponhamos que tenhamos sucessivamente extraído todos os possíveis fatores do quociente. Nesse ponto, teremos

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)q_1(x),$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ incluem todas as raízes de $p$, algumas possivelmente repetidas, e $q_1(x)$ é um polinômio que não possui raízes.

Se estivéssemos restritos ao conjunto dos números reais, a afirmativa acima representaria o ponto final da teoria. Se considerarmos, por exemplo, o polinômio $p(x) = x^6 - x^2$, vemos que ele pode ser fatorado como

$$p(x) = x^2(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1).$$

As raízes reais de $p$ são 0, 1 e $-1$; o fator restante $x^2 + 1$ não possui raiz real e não pode mais ser reduzido.

Se considerarmos os números complexos, no entanto, a situação muda de figura.

Resolvendo a equação $x^2 + 1 = 0$, encontramos $x = i$ ou $x = -i$. Deste modo, podemos fatorar $p$ completamente, na forma:

$$p(x) = x(x + 1)(x - 1)(x - i)(x + i).$$

O que aconteceu não foi específico a esse caso. No conjunto dos complexos, não há polinômios de grau maior ou igual a 1 que não possuam raízes. Isto é exatamente o que afirma o teorema a seguir, com justiça chamado de

**Teorema Fundamental da Álgebra:** *Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a* 1 *possui pelo menos uma raiz complexa.*

Embora fundamental para a Álgebra, o teorema acima é um teorema de Análise, e sua demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas (as idéias básicas da demonstração são mostradas na seção 9). Com sua ajuda podemos então estabelecer, de modo completo, a relação entre as raízes de um polinômio complexo e a sua forma fatorada.

**Teorema:** *Todo polinômio complexo* $p(x)$ *de grau* $n$ *pode ser fatorado na forma* $p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$, *onde* $c$ *é um número complexo e* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *são raízes complexas de* $p(x)$ *(possivelmente repetidas). Além disso, esta fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.*

**Demonstração:** Já vimos que $p(x)$ pode ser escrito como

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)q_1(x),$$

onde $q_1(x)$ não possui raízes. Mas, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, apenas polinômios constantes não possuem raízes complexas. Assim

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m),$$

para algum valor de $c$. Mas $p$ tem grau $n$; isso implica que o número de fatores do 1º grau deve ser $n$. Logo $m = n$ e provamos que $p$ se decompõe num produto de um fator constante e $n$ fatores do 1º grau.

Para demonstrar a unicidade da decomposição, suponhamos que $p$ possua duas decomposições distintas:

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

e

$$p(x) = c'(x - x_1')(x - x_2') \dots (x - x_n').$$

Inicialmente, comparando o termo de mais alto grau em ambas as expressões, verificamos que $c = c'$.

Logo, temos

$$(*) \qquad (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = (x - x_1')(x - x_2') \dots (x - x_n').$$

Calculando o valor dos dois lados da igualdade para $x = x_1$, obtemos

$$0 = (x_1 - x_1')(x_1 - x_2') \dots (x_1 - x_n').$$

Logo, pelo menos um dos números $x_1', \dots, x_n'$é igual a $x_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_1 = x_1'$. Substituindo $x_1' = x_1$ em (*), temos:

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = (x - x_1')(x - x_2') \dots (x - x_n').$$

Como o fator $(x - x_1)$ é comum aos dois lados da igualdade, ela se verifica se, e somente se, os polinômios obtidos cancelando $(x - x_1)$ em ambos os lados são iguais. Logo, temos

$$(x - x_2) \dots (x - x_n) = (x - x_2') \dots (x - x_n').$$

A aplicação repetida do mesmo argumento permite identificar e eliminar, em cada passo, um par de termos idênticos em cada lado da igualdade. Desta forma, fica estabelecida uma correspondência entre os termos das duas fatorações.

Como um polinômio $p$ de grau $n$ pode ser decomposto em $n$ fatores do 1º grau, é comum dizer que $p$ possui $n$ raízes. Naturalmente, isso não significa que $p$ necessariamente se anule para $n$ valores distintos de $x$. Como vimos anteriormente, pode haver repetição de fatorès na decomposição de $p(x)$. Grupando tais fatores, podemos escrever $p(x)$ na forma

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{\beta_1}(x - \alpha_2)^{\beta_2} \dots (x - \alpha_k)^{\beta_k}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são as raízes de $p$ e os expoentes $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ satisfazem $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k = n$. O expoente de cada termo

do 1º grau é chamado de *multiplicidade* da raiz correspondente. Raízes de multiplicidade 1 são chamadas de raízes *simples*; raízes de multiplicidade 2 são chamadas de raízes *duplas*; e assim por diante. Note que um número complexo $\alpha$ é raiz de multiplicidade $k$ de $p$ se, e somente se, $p(x)$ *é* divisível por $(x-\alpha)^k$ e *não é* divisível por $(x-\alpha)^{k+1}$.

Uma pergunda natural a ser feita nesse ponto é a seguinte: o que ganhamos, de fato, estendendo o estudo dos polinômios ao campo complexo? É verdade que ganhamos a satisfação de saber que todas as equações, neste campo, tem raízes. Mas se estamos apenas interessados, na maior parte dos casos, em raízes reais, de que nos servem estas raízes "artificiais"? Como dissemos antes, o principal ganho é estrutural. O fato de todas as equações de grau $n$ terem o mesmo número de raízes permite, por exemplo, que relações gerais entre coeficientes e raízes de uma equação possam ser estabelecidos.

## 7. Relações entre coeficientes e raízes

Consideremos um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

e consideremos suas $n$ raízes complexas (não necessariamente distintas) $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como vimos, $p(x)$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Observamos que o desenvolvimento do produto produz $2^n$ termos, correspondentes à escolha de um dos dois possíveis termos ("$x$" ou "$-x_i$") em cada fator. Grupando os termos semelhantes (isto é, no qual figurem a mesma potência de $x$), podemos exprimir os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $p(x)$ em termos das suas $n$ raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Comecemos com o termo em $x^n$, que é formado tomando a parcela "$x$", em todos os fatores e que é, portanto, igual a $cx^n$.

A seguir, formamos o termo em $x^{n-1}$, obtido escolhendo-se "$x$"

em cada fator exceto em um deles. Obtém-se assim

$$c(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n)x^{n-1} = -c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} = -cS_1\, x^{n-1},$$

onde $S_1$ denota a soma das raízes de $p$.

Formamos a seguir o termo em $x^{n-2}$, que é igual a

$$c((-x_1)(-x_2) + (-x_2)(-x_3) + \cdots + (-x_{n-1})(-x_n))x^{n-2} =$$
$$= c(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} = cS_2\, x^{n-2},$$

onde $S_2$ é a soma dos produtos das raízes de $p(x)$, tomadas duas a duas.

De modo geral, o termo em $x^{n-k}$ envolve produtos de $k$ fatores da forma $(-x_1)(-x_2)\ldots(-x_k)$ e é igual a

$$c(-1)^k S_k\, x^{n-k},$$

onde $S_k$ é a soma dos produtos das raízes de $p$, tomadas $k$ a $k$.

Em particular, o termo independente $a_0$ é dado por:

$$c(-1)^n S_n\,,$$

onde $S_n$ é o produto de todas as raízes de $p$.

Resumindo a discussão acima, o desenvolvimento de

$$c(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

fornece

$$p(x) = cx^n - cS_1x^{n-1} + cS_2x^{n-2} + \cdots + c(-1)^k S_kx^{n-k} + \cdots + c(-1)^n S_n\,.$$

Igualando os termos nesse desenvolvimento aos correspondentes em

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1x + a_0\,,$$

podemos, enfim, relacionar os coeficientes de um polinômio às somas de produtos de suas raízes. A comparação dos termos de mais

alto grau fornece $c = a_n$ e, a partir daí, obtemos:

$$S_1 = -\frac{a_{n-1}}{c} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$S_2 = \frac{a_{n-2}}{c} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$\vdots$$
$$S_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{c} = (-1)^n \frac{a_{n-k}}{a_n}$$
$$\vdots$$
$$S_n = (-1)^n \frac{a_0}{c} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

As relações acima nos permitem obter relações entre as raízes de uma equação mesmo sem resolvê-la; permitem também que seja formada, com facilidade, uma equação a partir de suas raízes.

**Exemplo.** Considere a equação $2x^3 - 4x^2 + 6x + 7 = 0$. As raízes $x_1$, $x_2$ e $x_3$ satisfazem:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-4}{2} = 2$$
$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{6}{2} = 3$$
$$S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{7}{2}.$$

**Exemplo.** Formar uma equação cujas raízes sejam 1, 1, 1/2 e −1. A equação procurada é do 4º grau e pode ser escrita como

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0,$$

onde

$S_1 = 1 + 1 + 1/2 - 1 = 3/2$

$S_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1/2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1/2 + 1 \cdot (-1) = -1/2$

$S_3 = 1 \cdot 1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1/2 \cdot (-1) + 1 \cdot (1/2) \cdot (-1) = -3/2$

$S_4 = 1 \cdot 1 \cdot 1/2 \cdot (-1) = -1/2.$

A equação procurada é, portanto:

$$x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

ou, equivalentemente

$$2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0.$$

**Exemplo.** Transformar a equação $x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$ de modo a eliminar seu termo em $x^2$.

O que queremos dizer com o enunciado acima é que desejamos obter uma nova equação, sem termo quadrático, com a propriedade de que, uma vez conhecidas as suas raízes, as da equação original possam ser imediatamente calculadas. Na equação original, a soma das raízes é igual a

$$S = -\frac{-6}{1} = 6.$$

Se, na nova equação a ser formada, cada raiz corresponder a uma raiz da anterior diminuida de 2 unidades, a soma de tais raízes será igual a 0 e, em conseqüência, o coeficiente do termo em $x^2$ será nulo. É conveniente usar uma outra letra, digamos $u$, para denotar a incógnita da nova equação. Entre as raízes das duas equações vale a relação

$$u = x - 2$$

ou, equivalentemente

(*) $$x = u + 2.$$

Substituindo esta expressão na equação original, obtemos a condição a ser satisfeita pelas raízes da nova equação:

$$(u + 2)^3 - 6(u + 2)^2 + 4(u + 2) + 1 = 0.$$

Desenvolvendo, encontramos:

$$u^3 - 8u - 7 = 0,$$

que é a transformada desejada: uma vez resolvida, as raízes da equação original são obtidas usando (*); isto é, somando-se 2 unidades a cada uma delas.

## 8. Equações algébricas com coeficientes reais

Lembramos que o ponto de partida para nossa discussão sobre equações algébricas foi a sua ocorrência em aplicações, onde, em geral, as equações obtidas têm coeficientes reais. Nesta seção lidamos exclusivamente com as propriedades de tais equações.

A propriedade mais importante é a de que raízes não-reais de equações algébricas com coeficientes reais ocorrem aos pares, devido ao teorema a seguir.

**Teorema:** *Se o complexo* $a + bi$ *é uma raiz complexa não-real de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu complexo conjugado* $a - bi$ *também é raiz da equação, com a mesma multiplicidade.*

**Demonstração:** Basta usar o fato de que somas e produtos de números complexos preservam a conjugação complexa. Isto é, dados complexos $z_1$ e $z_2$, temos

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{e} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Em particular, se $a$ é um número real, então

$$a(\bar{z})^n = a\bar{z}\bar{z}\bar{z}\ldots\bar{z} = \overline{azz\ldots z} = \overline{az^n}.$$

Assim, dado um polinômio $p$ com coeficientes reais, temos $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$, para todo $z$ complexo. Logo, se $a + bi$ é raiz de $p$, então

$$p(a - bi) = p(\overline{a + bi}) = \overline{p(a + bi)} = \bar{0} = 0,$$

o que mostra que $a - bi$ também é raiz de $p$.

Para mostrar que a multiplicidade de $a+bi$ e $a-bi$ é a mesma, basta eliminar as raízes $a + bi$ e $a - bi$, dividindo $p(x)$ por

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Como o divisor é um polinômio de coeficientes reais, o quociente

também tem coeficientes reais. Logo, novamente $a+bi$ e $a-bi$ estarão ambas presentes ou ausentes como raízes do novo polinômio. Concluímos, portanto, que as raízes $a+bi$ e $a-bi$ ocorrem o mesmo número de vezes.

**Exemplo.** Resolver a equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ sabendo que uma de suas raízes é $1 + i$.

**Solução:** Como a equação tem coeficientes reais, juntamente com $1 + i$ aparece também a raiz $1 - i$. Podemos eliminar cada uma delas, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini:

| | 1 | $-2$ | 1 | 2 | $-2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+i$ | 1 | $-1+i$ | $-1$ | $1-i$ | 0 |
| $1-i$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | |

Uma vez eliminadas as duas raízes complexas conjugadas, ficamos com

$$x^2 - 1 = 0$$

que possui raízes 1 e $-1$. Logo, as raízes são $1 + i$, $1 - i$, 1 e $-1$.

É claro que, ao invés de eliminar cada raiz complexa de uma vez, poderíamos também ter dividido $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2$, diretamente, pelo polinômio de coeficientes reais $x^2 - 2x + 2$, obtendo o mesmo resultado.

Note que, em conseqüência da discussão acima, podemos concluir que, embora nem sempre um polinômio de coeficientes reais possa ser fatorado em um produto de polinômios do 1º grau, é sempre possível fatorá-lo em um produto de fatores do 1º grau e de fatores do 2º grau.

Uma outra conseqüência importante é a de que *equações algébricas com coeficientes reais tendo grau ímpar sempre possuem pelo menos uma raiz real*. De fato, como as raízes não reais ocorrem aos pares e tais equações possuem um número ímpar de raízes, concluímos que ao menos uma dessas raízes é real.

A existência de raízes reais para equações algébricas de grau ímpar (com coeficientes reais) pode ser deduzida através de outro tipo de argumento. Consideremos uma função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $n$ ímpar e $a_n > 0$ ( o caso $a_n < 0$ é análogo). É possível mostrar que, para $x$ suficientemente grande, $p(x) > 0$, enquanto $p(x) < 0$ para $x$ suficientemente negativo (veja o exercício 21). Como funções polinomiais são contínuas, o fato de elas assumirem valores positivos e negativos obriga a existência de pelo menos um valor $\alpha$ para o qual $p(\alpha) = 0$.

A figura 6.3, a seguir, mostra o gráfico da função polinomial de 3º grau

$$p(x) = x^3 - 3x + c$$

para $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

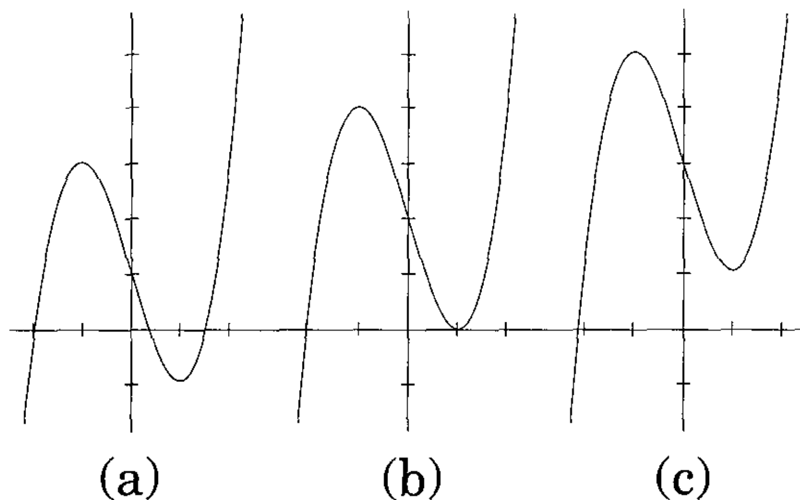



**Figura 94 - Gráficos de** $p(x) = x^3 - 3x + c$: **(a)** $p(x) = x^3 - 3x + 1$; **(b)** $p(x) = x^3 - 3x + 2$; **(c)** $p(x) = x^3 - 3x + 3$

No primeiro caso, $p$ tem três raízes reais, não existindo raízes complexas não reais. No terceiro caso, $p$ tem uma única raiz real; concluímos, portanto, que as duas outras raízes de $p$ são complexos conjugados. No entanto, o segundo caso pode, à primeira vista, provocar confusão, já que existem apenas dois valoes reais de $x$

para os quais $p(x) = 0$ (esses valores são 1 e $-2$). Assim, poderíamos ser levados a acreditar que p possui exatamente uma raiz complexa não real, o que seria uma contradição com tudo que discutimos nessa seção. A resposta a esta aparente contradição está na contagem das raízes de uma equação polinomial, que leva em conta a multiplicidade das raízes da equação. Na verdade, p tem uma raiz dupla real em 1 e uma raiz simples em $-2$, para um total de três raízes reais e nenhuma raiz complexa. O fato de 1 ser raiz dupla pode ser inferido do comportamento do gráfico. Se 1 fosse uma raiz simples de p (ou mais geralmente uma raiz de multiplicidade ímpar), o expoente do fato $(x-1)$ na forma fatorada de p seria ímpar; em conseqüência, p mudaria de sinal em 1. Mas isso não ocorre: os valores de $p(x)$ são positivos tanto para valores de x imediatamente à esquerda de 1 quanto para valoes de x imediatamente à direita.

Funções polinomiais reais de grau par têm número par de raízes e pode muito bem ocorrer de todas essas raízes serem complexas não reais. As figuras 6.4A, B e C mostram gráficos de

$$p(x) = x^4/4 + x^3/3 - x^2 + c$$

para $c = 3$, $c = 8/3$, $c = 2$, $c = 5/12$, $c = 1/3$ e $c = 0$.

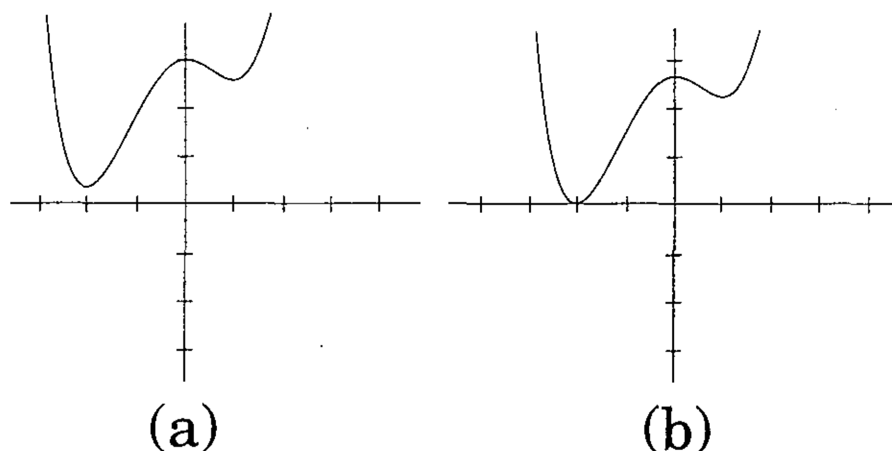



**Figura 95A - Gráficos de** $p(x) = x^4/4+x^3/3-x^2+c$: **(a)** $x^4/4+x^3/3-x^2+3$ **(b)** $x^4/4+x^3/3+x^2+8/3$.

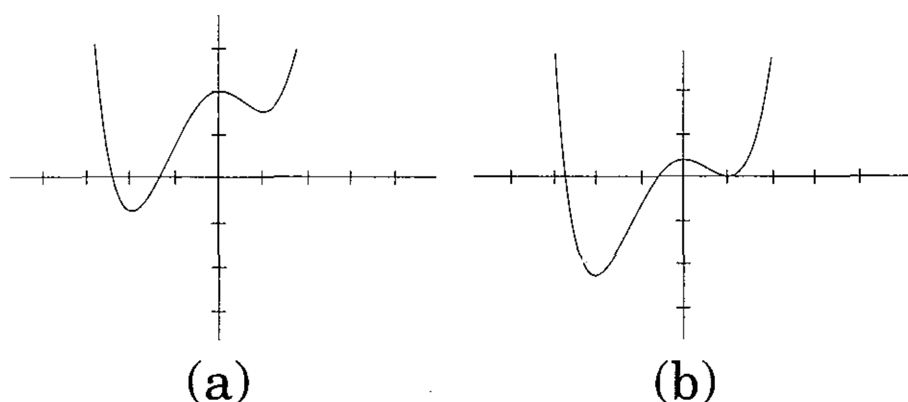



**Figura 95B - Gráficos de** $p(x) = x^4/4+x^3/3-x^2+c$: **(a)** $x^4/4+x^3/3-x^2+2$ **(b)** $x^4/4 + x^3/3 - x^2 + 5/12$.

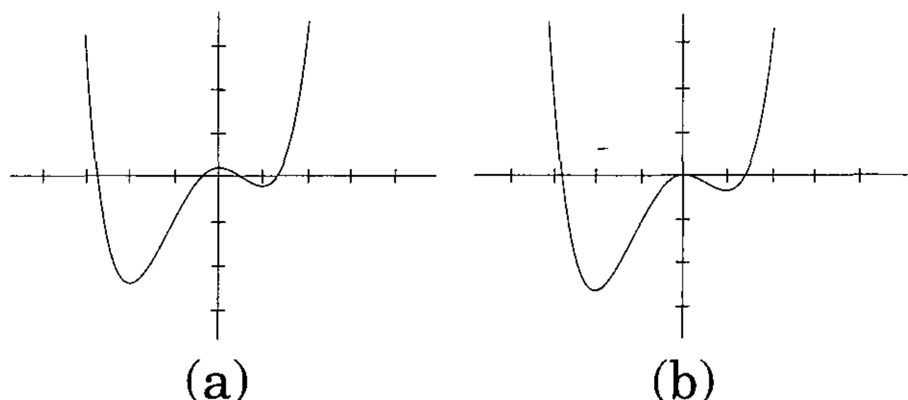



**Figura 95C - Gráficos de** $p(x) = x^4/4 + x^3/3 - x^2 + c$: **(a)** $x^4/4 + x^3/3 - x^2 + 1/3$; **(b)** $x^4/4 + x^3/3 - x^2$.

No primeiro caso, o gráfico não corta o eixo dos $x$: a equação não possui raízes reais. No segundo caso, a equação toca, sem cortar, o eixo $x$, indicando a presença de uma raiz real dupla e duas raízes complexas não reais; no terceiro caso, temos duas raízes reais distintas; no quarto, são duas raízes reais simples e uma raiz real dupla, não existindo raízes complexas não reais. No quinto caso, temos quatro raízes reais distintas. Finalmente, no último caso, temos mais uma vez quatro raízes reais, sendo uma raiz dupla e duas simples.

## 9. Demonstrando o Teorema Fundamental da Álgebra

Nos livros-texto de Matemática do Ensino Médio, o Teorema Fun-

damental da Álgebra é apresentado como fizemos na seção 7: como um resultado que faz (de modo algo mágico) com que possamos garantir a existência de exatamente $n$ raízes para um polinômio de grau $n$. A rigor, ele é apresentado nos livros como se um fosse um axioma, sem quaisquer razões para pelo menos mostrar que se trata de um resultado plausível. Isso se justifica pelo fato de que sua demonstração requer argumentos que não podem ser feitos de modo preciso no Ensino Médio. Mas é interessante que pelo menos o professor tenha uma idéia sobre como demonstrá-lo.

Nesta seção, mostramos que argumentos semelhantes aos usados para demonstrar a existência de raízes reais para polinômios de grau ímpar podem ser empregados para provar o Teorema Fundamental da Álgebra. O ponto central ali foi a idéia (decorrente da continuidade das funções polinomiais, mas extremamente intuitiva) de que, ao longo de um intervalo, um polinômio assume todos os valores situados entre os valores assumidos nas extremidades do intervalo. Aqui empregamos também a idéia de continuidade, mas de um modo mais sofisticado.

Consideremos uma função polinomial $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são números complexos. Note que agora estamos olhando $p$ como uma função definida no conjunto dos complexos (isto é, como uma função que associa a cada ponto do plano complexo a sua imagem, que também é um ponto do plano complexo). Queremos demonstrar que existe um complexo $z_0$ tal que sua imagem $p(z_0)$ seja igual a zero (ou seja, que existe um ponto do plano complexo cuja imagem por $p$ seja a origem).

A fim de poder explorar a continuidade das funções polinomiais complexas (vista aqui de modo intuitivo, mas que pode ser tornado matematicamente preciso), vamos considerar as imagens, através de $p$, de círculos do plano complexo de centro na origem. Como é a imagem de um tal círculo? Devido à continuidade de $p$, a imagem de uma curva contínua e fechada (isto é, que volta ao

ponto de partida) deve ser uma outra curva contínua e fechada. No entanto, a curva imagem não é necessariamente uma curva simples (ou seja, ela pode cruzar a si própria).

Para ilustrar, vejamos qual é a imagem do círculo $|z| = r$ (círculo de centro na origem e raio 1) através do polinômio

$$p(z) = z^2 + z + 2.$$

Exprimindo $z$ na forma polar $z = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, temos

$$\begin{aligned} p(z) &= (r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta))^2 + r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) + 2 \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) + r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) + 2. \end{aligned}$$

Quando $z$ percorre o círculo de raio $r$, seu argumento $\theta$ varia de 0 a $2\pi$. Em conseqüência, $2\theta$ varia de 0 a $4\pi$. Assim, enquanto $z$ percorre uma vez o círculo anterior,

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$$

percorre duas vezes o círculo de centro na origem e raio $r^2$.

Desta forma, $p(z)$ é a soma de três complexos: 2, o próprio $z$, que percorre um círculo de centro na origem e raio $r$, e $z^2$, que percorre (duas vezes) o círculo de centro na origem e raio $r$). A questão é: qual é o efeito de somar as contribuições de $z$ e $z^2$? Embora não seja muito simples descrever o comportamento dessa soma, é fácil ver o que ocorre nos casos extremos, em que $r$ é muito grande ou muito pequeno.

Quando $r$ tem valor próximo de zero, $r^2$ é muito menor que $r$. Por este motivo, o comportamento de $p(z)$ é ditado essencialmente por $z$. Assim, a trajetória descrita por $p(z)$ é um círculo de centro 2, ligeiramente perturbado pelo termo $z^2$.

À medida que $r$ cresce, o efeito de $z^2$ torna-se maior. Para valores grandes de $r$, o comportamento de $p(z)$ passa a ser ditado por $z^2$. Isso fica mais claro escrevendo

$$p(z) = r^2\left[(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) + \frac{2}{r^2}\right].$$

Para valores grandes de $r$, a trajetória de $p(z)$ vai ser, portanto,

um círculo de centro na origem e raio $r^2$ (percorrido duas vezes enquanto $z$ percorre o círculo original), ligeiramente perturbado pelas contribuições das outras parcelas.

A figura 6.5 mostra a curva descrita por $p(z)$ em dois casos: $r = 1/2$ e $r = 3$.

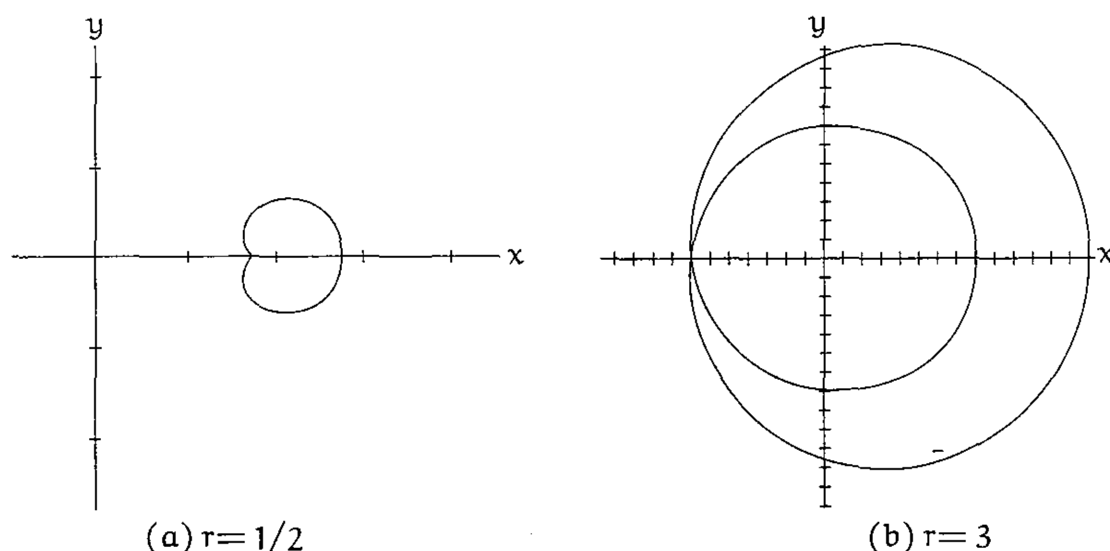



**Figura 96**

Note que, para valores de $r$ próximos de zero, a curva descrita por $p(z)$ é uma curva fechada em torno do complexo $2 + 0i$ e arbitrariamente próxima deste complexo. Assim, para valores pequenos de $r$, a origem fica no exterior da curva descrita por $p(z)$. Já para valores grandes de $r$, a curva descrita por $p(z)$ se comporta, essencialmente, como um círculo de centro na origem; logo, a origem fica no interior da curva. Mas a curva descrita por $p(z)$ evolui continuamente à medida que $r$ aumenta. Logo concluímos que, de modo a passar do exterior para o interior, a origem tem que pertencer à curva para algum valor de $r$. No caso da equação dada, isso ocorre para $r = \sqrt{2}$, conforme ilustrado na figura 6.6. Isto significa que existe um complexo (de módulo $\sqrt{2}$) $z$ cuja imagem $p(z)$ é a origem e, portanto, que a equação $p(z) = 0$ tem uma solução. De fato, as raízes de $p$ são os complexos

$$\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2},$$

que têm módulo $\sqrt{2}$.

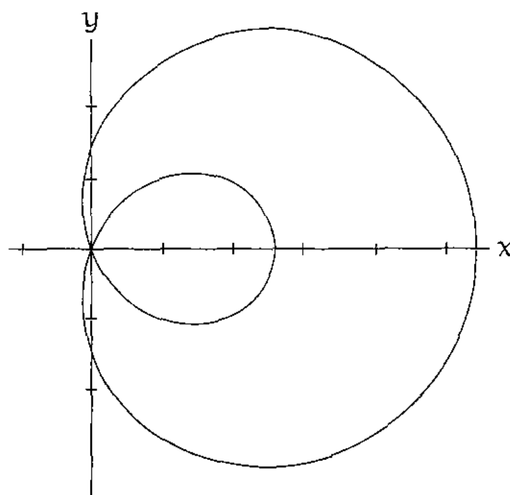



**Figura 97**

O mesmo argumento acima pode ser empregado para

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Para $r$ pequeno, se $z$ descreve um círculo de centro na origem e raio $r$, então a curva descrita por $p(z)$ é uma curva fechada, em torno do complexo $a_0$, e tendo a origem em seu exterior. Para $r$ grande, a curva descrita por $z$ dá $n$ voltas em torno da origem. Para passar da primeira situação (origem exterior) para a segunda (origem interior), é necessário que, em algum momento, a curva contenha a origem e, assim, que $p(z) = 0$ possua uma raiz complexa. Logo toda equação polinomial possui pelo menos uma raiz complexa.

## 10. Resolução algébrica de equações

Nas seções anteriores, nos dedicamos, principalmente, a entender as propriedades de equações algébricas e de suas raízes. No decorrer deste processo, vimos técnicas úteis para resolver determinadas equações; por exemplo, vimos como reduzir o grau de uma equação, uma vez conhecidas uma ou mais de suas raízes. Mas o que fazer diante de uma equação algébrica genérica que necessitemos resolver? Existem fórmulas de solução para tais equações, a exemplo do que ocorre com equações do 1º e 2º grau?

A busca por respostas a essas perguntas foi responsável por importantes avanços da Matemática, no período aproximado de 1500 a 1800. A primeira contribuição importante foi a de Tartaglia, que obteve uma fórmula de resolução, envolvendo radicais, para equações do 3º grau. Não muito depois, Ferrari generalizou o processo para equações do 4º grau. E as coisas pararam por aí. Durante três séculos, buscou-se um processo de resolução para equações de grau 5 ou superior através de radicais. A questão foi resolvida por Abel e Galois, que demonstraram a impossibilidade de se ter uma fórmula geral para resolver equações de grau superior a 4. Como ocorre muitas vezes em Matemática, apesar da resposta a respeito da possibilidade de se resolver tais equações por radicais ser negativa, a busca não foi infrutífera: a teoria desenvolvida por Galois em sua demonstração gerou uma inteira área de desenvolvimento na Álgebra.

O fato de não possuirmos fórmulas algébricas de resolução para equações de grau superior a 4 não significa que não possamos resolver tais equações, isto é, calcular suas raízes reais e complexas. Os processos de resoluão, no entanto, envolvem métodos numéricos de aproximação e são discutidos na próxima seção. Na verdade, mesmo equações de grau 3 e 4 não são, na prática, resolvidas através de suas fórmulas algébricas de resolução, preferindo-se, na maior parte das vezes, recorrer a métodos numéricos.

Apesar da inexistência de fórmulas de resolução para equações de grau maior ou igual a 4, determinadas equações particulares podem ser resolvidas algebricamente. A seguir, vemos algumas situações onde é possível a resolução algébrica.

## a) Equações na forma fatorada

Equações que se apresentam na forma fatorada, isto é, na forma

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

têm, obviamente, solução imediata: as raízes da equação acima são $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Muitas vezes, porém, esse fato passa desperce-

bido aos alunos: eles estão tão condicionados a efetuar expressões algébrica que executam o produto, do qual em geral resulta uma equação onde as raízes não estão mais evidentes. Convém chamar sua atenção para o fato fundamental de que um produto é nulo se e somente se um dos seus fatores se anula.

### b) Equações da forma $(x-p)^n = q$

Um número complexo $x$ é raiz da equação acima se e só se $x - p$ é raiz de ordem $n$ do complexo $q$. Se representamos $q$ na forma polar $q = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, temos:

$$\begin{aligned}(x-p)^n = q &\Leftrightarrow x - p = \sqrt[n]{q}\\ &\Leftrightarrow x = p + \sqrt[n]{q}\\ &\Leftrightarrow x = p + \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\end{aligned}$$

onde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Essas raízes, quando representadas no plano complexo, são vértices de um polígono regular.

É interessante observar que o processo de resolução de uma equação do 2º grau pode ser visto como consistindo de uma redução a este caso. De fato, para obter a fórmula de resolução para $ax^2 + bx + c = 0$, basta "completar o quadrado" da expressão $ax^2 + bx$ transformando a equação em uma equação da forma $(x-p)^2 = q$:

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{z}x = -\frac{c}{z}\\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{z}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\end{aligned}$$

que é da forma $(x-p)^2 = q$. Igualando $x + \frac{b}{2a}$ às raízes quadradas do lado direito, chegamos à fórmula usual:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

## c) Equações do 3º grau

Embora não se constitua em uma forma prática para resolver equações do 3º grau, a fórmula de resolução, desenvolvida pelos matemáticos italianos del Ferro e Tartaglia e publicada por Cardano, tem valor histórico e convém que os professores tomem contato com ela. Ela ajuda, também, a entender a origem de certos problemas que podem parecer misteriosos, como o abaixo.

**Exemplo.** Mostrar que o número

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

é inteiro.

**Solução:** Certamente, a expressão acima representa um número real. Fazendo

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

e elevando ao cubo em ambos os lados, obtemos:

$$x^3=(2+\sqrt{5})+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+$$
$$+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2+(2-\sqrt{5}).$$

Simplificando, encontramos:

$$x^3+4+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Mas a expressão entre parênteses é igual ao próprio número $x$. Por outro lado,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{4-5}=-1.$$

Assim, a igualdade acima pode ser escrita como:

$$x^3=4-3x$$

ou seja

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Logo, o número dado satisfaz a equação acima. Como o enunciado afirma que o número é inteiro, devemos esperar que a equação acima possua raízes inteiras. É fácil verificar que, de fato, 1 é raiz. Eliminando-a, temos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 3 | −4 |
| 1 | 1 | 1 | 4 | 0 |

Logo a equação pode ser escrita como

$$(x - 1)(x^2 + x + 4) = 0.$$

O fator do segundo grau não tem raízes reais. Logo, 1 é a única raiz real da equação. Como sabemos que o número dado é real e é raiz da equação, ele só pode ser igual a 1; portanto, apesar das aparências, é um número inteiro.

Consideraremos equações da forma $x^3+px+q = 0$, isto é, tendo termo em $x^2$ nulo, como a que obtivemos no problema acima. Isto não impõe qualquer restrição, pois conforme mostra o exemplo no fim da seção 7, toda equação do 3º grau pode ser transformada em uma equação desse tipo.

A equação $x^3 + px + q = 0$ se transforma em uma equação solúvel por radicais quando se faz a substituição $x = u - \frac{p}{3u}$ (ou $x = u + v$, onde $v = -\frac{p}{3u}$). De fato, ao substituir $x$ por essa expressão na equação, obtemos, sucessivamente:

$$\left(u - \frac{p}{3u}\right)^3 + p\left(u - \frac{p}{3u}\right) + q = 0$$

$$u^3 - pu + \frac{p^2}{3u} - \frac{p^3}{27u^3} + pu - \frac{p^2}{3u} + q = 0$$

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$$

$$(*) \qquad u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

que é uma equação do segundo grau em $u^3$. Resolvendo-a, obtemos:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,.$$

Para cada um dos dois valores de $u^3$ acima, obtemos três valores de $u$, para um total de 6 valores possíveis. Somando cada um desses valores com o valor correspondente $v = -p/3u$, obtemos uma raiz $u+v$ da equação. Na verdade, cada raiz é obtida duas vezes. Para entender o que ocorre, basta observar que, na equação do 2º grau que resolvemos para calcular $u^3$, o produto das raízes é $-\frac{p^3}{27}$. Mas

$$u^3v^3 = (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}\,.$$

Isso mostra que $v^3$ também é raiz de (*). Logo, aos valores de $u$ que são raízes cúbicas de

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

correspondem valores de $v$ que são raízes cúbicas de

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e vice-versa. Isso explica a repetição de raízes. Isso explica também a expressão mais usada para as raízes da equação, conhecida como *fórmula de Cardano*:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,.$$

É preciso interpretar corretamente a fórmula acima. Ela diz que as três raízes da equação

$$x^3 + px + q = 0$$

são obtidas somando cada uma das raízes cúbicas $u_1$, $u_2$, $u_3$ representadas pelo primeiro radical com uma das raízes cúbicas dadas pelo segundo radical (respectivamente $-\frac{p}{3u_1}$, $-\frac{p}{3u_2}$ e $-\frac{p}{3u_3}$).

**Exemplo.** Consideremos a equação $x^3 - 3x - 4 = 0$.

A fórmula de Cardano fornece

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{3^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{3^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

A soma das raízes cúbicas reais indicadas fornece a raiz real da equação, que, como vimos, é igual a 1. As raízes complexas são obtidas combinando-se apropriadamente as raízes cúbicas complexas.

## 11. Resolução numérica de equações

Na prática, equações polinomiais genéricas de grau 3 ou superior são resolvidas através de métodos numéricos. Tais métodos fornecem uma seqüência de valores que aproximam, com o grau de precisão desejado, a raiz que se deseja obter. A situação mais comum é aquela na qual desejamos obter uma raiz real de uma equação. É esse o caso que estudamos aqui.

O método mais simples de resolução é o de *bisseção*. Sejam $a$ e $b$ números reais. Suponhamos que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. Certamente, $p$ possui, então, uma raiz no intervalo $[a, b]$. Mas onde? Podemos melhorar a qualidade de nossa estimativa, calculando $p(m)$, onde $m$ é o ponto médio do intervalo $[a, b]$ (isto é, $m = (a+b)/2$). Se $p(m) > 0$, podemos garantir a existência de uma raiz no intervalo $[a, m]$; já se $p(m) < 0$, existe certamente uma raiz no intervalo $[m, b]$. Assim, reduzimos à metade o comprimento do intervalo contendo a raiz procurada. É claro que esse processo pode ser repetido indefinidamente, resultando daí aproximações

tão exatas quando desejarmos para a raiz procurada.

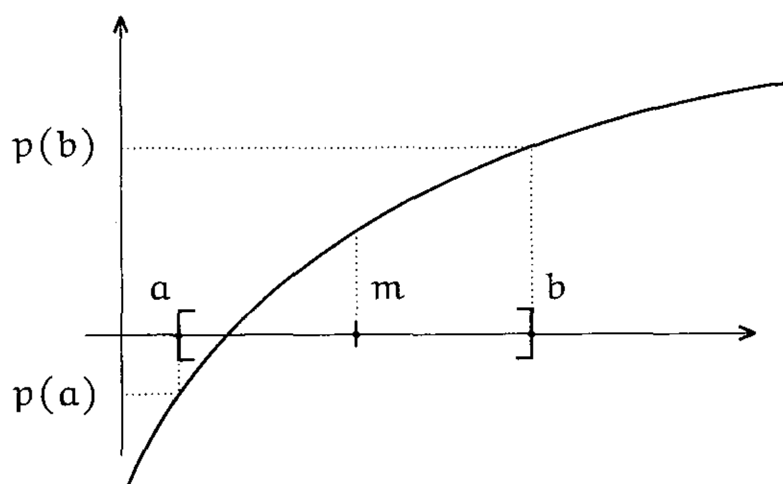



**Figura 98**

**Exemplo.** Vamos usar o método da bisseção para calcular a raiz cúbica real de 10. A equação a ser resolvida é $p(x) = x^3 - 10 = 0$. Temos $p(2) = -2$ e $p(3) = 17$. Isto indica que a raiz desejada está (como na verdade já sabíamos) entre 2 e 3. O ponto médio do intervalo $[2, 3]$ é $m = 2,5$. Como $p(2,5) = 2,5^3 - 10 = 5,625$, a raiz está no intervalo $[2; 2,5]$ e assim sucessivamente. A tabela abaixo mostra o resultado obtido em 5 iterações do método.

| $a \quad (p(a) < 0)$ | $b \quad (p(b) > 0)$ | $m$ | $p(m)$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2,5 | $5,625 > 0$ |
| 2 | 2,5 | 2,25 | $1,390 > 0$ |
| 2 | 2,25 | 2,125 | $-0,404 < 0$ |
| 2,125 | 2,25 | 2,1875 | $0,467 > 0$ |
| 2,125 | 2,1875 | 2,15625 | $0,025 > 0$ |

Após 5 iterações obtemos a aproximação 2,15625 para a raiz cúbica de 10. Para efeito de comparação, a raiz cúbica de 10 com 5 casas decimais é 2,15443. Deste modo, após 5 iterações temos 2 casas decimais corretas.

Outro método de solução é o chamado método da *secante*. Para obter uma melhor estimativa para a raiz contida no inter-

valo $[a, b]$, podemos aproximar o gráfico da função polinomial em $[a, b]$ através do segmento de extremos $(a, p(a))$ e $(b, p(b))$ (este segmento determina uma secante à curva que representa o gráfico de $p$; daí a razão do nome do método). A reta que pasa por $(a, p(a))$ e $(b, p(b))$ tem equação

$$y = p(a) + \frac{p(b) - p(a)}{b - a}(x - a).$$

A abcissa $x_1$ de seu ponto de interseção com o eixo dos $x$ fornece nossa primeira aproximação para a raiz procurada. O valor de $x_1$, obtido igualando $y$ a zero na equação da reta, é:

$$x_1 = \frac{ap(b) - bp(a)}{p(b) - p(a)}.$$

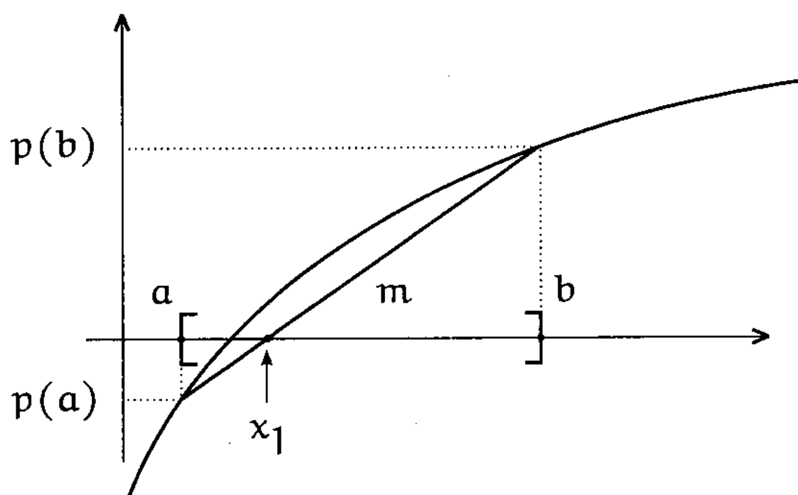



**Figura 99**

Para a próxima estimativa, podemos agir de dois modos. Um deles consiste em fazer como antes e repetir o processo para o intervalo que contém a raiz, dentre os dois determinados por $x_1$. O outro método, que fornece resultados muito melhores, consiste em usar as duas últimas estimativas para definir a reta secante. Nesse caso, convém representar $a$ e $b$ por $x_{-1}$ e $x_0$, respectivamente. Assim, a seqüência de aproximações é dada recursiva-

mente por

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1}\,p(x_i) - x_i\,p(x_{i-1})}{p(x_i) - p(x_{i-1})}, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

**Exemplo.** Vejamos o resultado de aplicar o método da secante ao exemplo anterior. Tomando $x_{-1} = 2$ e $x_0 = 3$, a primeira estimativa é

$$x_1 = \frac{2p(3) - 3p(2)}{p(x) - p(2)} = \frac{34 - (-6)}{17 - (-2)} = \frac{40}{19} = 2,10526.$$

A tabela abaixo fornece as estimativas obtidas a seguir.

| $i$ | $x_i$ | $p(x_i)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2,10526 | $-0,66919$ |
| 2 | 2,13914 | $-0,2113$ |
| 3 | 2,15479 | 0,0049 |
| 4 | 2,15443 | $-0,00003$ |

Comparando com o método da bisseção, verificamos que a convergência é bem mais rápida agora (o valor obtido na quarta iteração do método acima possui 5 casas decimais corretas).

Finalmente, devemos mencionar o *método de Newton*, que utiliza também aproximações lineares para o gráfico de $p$, mas obtidas através de tangentes, ao invés de secantes (e que requer, portanto, noções de Cálculo). Seja $x_0$ uma primeira aproximação para a raiz procurada (por exemplo, podemos tomar $x_0$ como um dos extremos ou o ponto médio de um intervalo que sabemos conter a raiz). A inclinação da tangente ao gráfico de $p$ no ponto $(x_0, p(x_0))$ é o valor $p'(x_0)$ do polinômio derivada no ponto $x_0$ (se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

seu polinômio derivada é

$$p'(x) = n a_{n-1} x^{n-1} + (n-1) a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1;$$

veja o exercício 14). Logo, a equação da tangente é

$$y = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0).$$

A abcissa $x_1$ do ponto em que esta tangente corta o eixo dos $x$ fornece uma nova (e usualmente melhor) estimativa para a raiz que procuramos. Igualando $y$ a zero obtemos

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}.$$

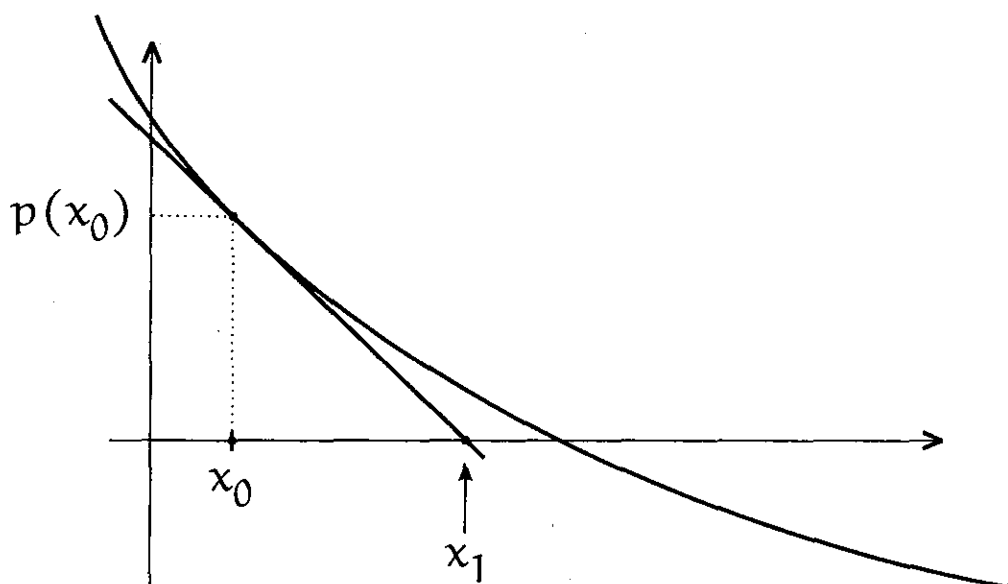



**Figura 100**

Deste modo, como no método da secante, definimos recursivamente uma seqüência cujos elementos fornecem aproximações cada vez melhores da raiz procurada.

**Exemplo.** Vejamos como se comporta o método de Newton no exemplo anterior ($p(x) = x^3 - 10$). O polinômio derivada é $p'(x) = 3x^2$. Tomemos $x_0 = 2$ como nosssa estimativa inicial. Então $p(2) = -2$, $p'(2) = 12$ e a próxima estimativa é

$$x_1 = 2 - \frac{-2}{12} = 2,16667.$$

Os resultados decorrentes das primeiras iterações são mostrados abaixo.

| $i$ | $x_i$ | $p(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | −2 |
| 1 | 2,16667 | 0,12129 |
| 2 | 2,15450 | 0,00095 |
| 3 | 2,15443469 | 0,00000003 |

A aproximação obtida na primeira iteração tem 1 casa decimal correta; a 2ª aproximação tem 3 casas corretas; a 3ª aproximação tem 8 casas decimais corretas! Este bom desempenho não foi casual: é possível demonstrar que, desde que o ponto de partida esteja suficientemente próximo da raiz desejada, o método de Newton dobra o número de algarismos corretos da aproximação a cada iteração.

Apesar de seu desempenho, é bom frisar que o método de Newton, assim como o método da secante, é um método local: exige que o ponto de partida esteja próximo da raiz procurada. Se isso não ocorre, pode convergir para uma outra raiz não desejada ou simplesmente não convergir (veja o exercício 28)

## Exercícios

1. Determine um polinômio $P$ do 3º grau para o qual $P(x+1) = P(x) + x^2$ para todo $x$. Use-o para obter uma expressão para a soma $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

2. Obtenha os valores das constantes $A$, $B$ e $C$ tais que

$$\frac{2x+1}{(x^3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

para todo $x$ tal que $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$.

3. Encontre um polinômio complexo de grau mínimo tal que

$P(i) = -1$, $P(1) = 2 + i$ e $P(0) = 1$.

4. Determine os valores de $m$ e $n$ para os quais o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$.

5. Os restos da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x - 3)$ e $(x + 1)$ são, respectivamente, 1 e 4. Determine o resto da divisão de $p$ por $(x - 3)(x + 1)$.

6. Se um polinômio $p$ é divisível pelos polinômios $p_1$ e $p_2$, então $p$ é divisível pelo produto $p_1p_2$. Certo ou errado?

7. Sejam $p_1$ e $p_2$ polinômios não nulos. Um polinômio $m$ é chamado de um máximo divisor comum (m.d.c.) de $p_1$ e $p_2$ quando d satisfaz as duas condições abaixo:

 i) $m$ é divisor comum de $p_1$ e $p_2$.

 ii) se $d$ é um divisor comum de $p_1$ e $p_2$, então $d$ é divisor de $m$.

 a) Mostre que se $m_1$ e $m_2$ são mdcs de $p_1$ e $p_2$, então existe uma constante $c \neq 0$ tal que $m_1 = cm_2$ (isto é, o mdc de dois polinômios é único, a menos de uma constante multiplicativa).

 b) Mostre que se $p_2$ é divisor de $p_1$, então $p_2$ é um mdc de $p_1$ e $p_2$.

 c) Suponha que grau $(p_1) \geqslant$ grau $(p_2)$. Seja $r$ o resto da divisão de $p_1$ por $p_2$. Mostre que mdc $(p_1, p_2) =$ mdc $(p_2, r_1)$.

 d) Descreva um algoritmo que obtém o mdc de dois polinômios através de divisões sucessivas (algoritmo de Euclides).

 e) Ache o mdc dos polinômios $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ e $q(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$.

 f) Mostre que $\alpha$ é uma raiz comum a dois polinômios $p$ e $q$ se e somente se $\alpha$ é raiz do seu mdc. Use este fato para achar as raízes comuns aos polinômios $p(x)$ e $q(x)$ acima.

g) Sejam $p_1$ e $p_2$ dois polinômios e seja $m$ seu mdc. Mostre que um polinômio $p$ pode ser escrito na forma

$$p = q_1 p_1 + q_2 q_2 \quad \text{(onde } q_1 \text{ e } q_2 \text{ são polinômios quaisquer)}$$

se e somente se $p$ é um múltiplo de $m$.

h) Use a propriedade análoga para números inteiros para responder à seguinte pergunta: existem inteiros $m$ e $n$ tais que $75m + 28n = 3$?

8. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau $n$ e seja $a$ um número complexo.

a) Mostre, através de divisões sucessivas por $(x - a)$, que $p$ pode ser desenvolvido segundo as potências de $(x - a)$; isto é, na forma $p(x) = b_n(x-a)^n + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + b_1(x-a) + b_0$.

b) Desenvolva $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ segundo as potências de $(x - 1)$.

c) Use b) para obter uma equação cujas raízes são as raízes de $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ aumentadas de 1 unidade.

9. Seja $P(x) = a_0 x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficientes inteiros. Mostre que se $a$ é uma raiz inteira de $P$, então $a$ é necessariamente um divisor de $a_0$. Utilize para verificar se a equação $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ tem raízes inteiras.

10. Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinómio de coeficientes inteiros. Mostre que se $a = p/q$ ( $p$ e $q$ primos entre si) é uma raiz racional de $P$, então necessariamente $p$ é um divisor de $a_0$ e $q$ é um divisor de $a_n$. Utilize para verificar se a equação $3x^3 - 2x^2 + 0x - 6 = 0$ tem raízes racionais.

11. Seja $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficientes inteiros em que o termo de mais alto grau tem coeficiente 1. $P$ pode ter raízes racionais não inteiras?

12. Sejam $a$, $b$ e $c$ as raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. Calcule:

a) $1/a + 1/b + 1/c$

b) $a^2 + b^2 + c^2$.

13. Dada a equação $x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$, forme a equação cujas raízes são as recíprocas das raízes da equação original.

14. A *derivada* do polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é definida como o polinômio

$$p'(x) = a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

a) Mostre que $a$ é raiz simples de $p$ se e só se $p(a) = 0$ e $p'(a) \neq 0$.

b) Mostre que $a$ é raiz dupla de $p$ se e só se $p(a) = p'(a) = 0$ e $p''(a) \neq 0$.

c) Mostre que $a$ é raiz de multiplicidade $k$ ($k \leqslant n$) de $p$ se e só se $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0$ e $p^{(k)}(a) \neq 0$.

15. Mostre que $a$ é raiz múltipla de um polinômio $p$ se e só se $a$ é raiz comum de $p$ e de sua derivada $p'$. Use esse fato para verificar se a equação $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$ tem raízes múltiplas.

16. Mostre que um polinômio $p(x)$ de grau $n$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

onde $p^{(k)}$ denota a k-ésima derivada de $p$.

(Esta expressão é conhecida como a *Fórmula de Taylor* para polinômios).

17. Forme a equação de grau mínimo que tem $i$ e $1 + 2i$ como raízes.

18. Forme a equação de grau mínimo, com coeficientes reais, que tem $i$ e $1 + 2i$ como raízes.

19. Determine um polinômio $P$ de grau mínimo, com coeficientes reais, tais que $P(1 + i) = 0$ e $P(3) = 2$.

20. Determine um polinômio P de grau mínimo, com coeficientes reais, tal que $P(i) = 2$ e $P(1+i) = 0$.

21. Seja $p$ um polinômio de grau ímpar. Mostre que existem números $x_1$ e $x_2$ tais que $p(x_1) > 0$ e $p(x_2) < 0$. Conclua que todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

22. Mostre que, se $n$ é par, então o polinômio

$$p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$$

não possui raízes reais.

23. Dizemos que um número é algébrico quando é raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Mostre que o número $\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{3}$ é algébrico.

24. Resolva a equação $(x+1)^n = x^n$.

25. Resolva e equação $(x+1)^n + (x-1)^n = 0$.

26. Mostre que o número $\sqrt[3]{20+14\sqrt{5}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é inteiro.

27. Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ possui três raízes reais. Verifique, porém, que o cálculo dessas raízes utilizando a fórmula de resolução para a equação do 3º grau necessariamente envolve números complexos.

28. Seja $p(x) = x^3 - x$. Verifique o que ocorre quando se aplica o método de Newton para determinação de raízes com o ponto de partida $x_0 = \sqrt{5}/5$.

29. Nas calculadoras, raízes quadradas são obtidas usando o método de Newton para o polinômio $p(x) = x^2 - a$, onde $a$ é o número cuja raiz quadrada se quer determinar.

a) Mostre que a seqüência de aproximações é dada recursivamente por

$$x_{i+1} = \frac{x_i + \frac{a}{x_i}}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

b) Obtenha os primeiros termos para o cálculo de $\sqrt{2}$.




## COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E.L.Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A.C.Morgado, J.B.Pitombeira, P.C.P.Carvalho e P.Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E.L.Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E.L.Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E.L.Lima com a colaboração de P.C.P.Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M.P.do Carmo, A.C.Morgado, E.Wagner, Notas Históricas de J.B.Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E.L.Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A.C.Morgado, E.Wagner e S.C.Zani
- *Construções Geométricas* - E.Wagner com a colaboração de J.P.Q.Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P.C.P.Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J.L.M.Barbosa
- *Isometrias* - E.L.Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol.1* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol.2* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol.3* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *Matemática e Ensino* - E.L.Lima
- *Temas e Problemas* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A.Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E.L.Lima

## COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D.G.de Figueiredo
- *Primalidade em Tempo Polinomial - Uma Introdução ao Algoritmo AKS* - S.C.Coutinho

## COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L.N.de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E.C.de Oliveira e M.Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M.P.do Carmo

## COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H.Bolfarine e M.Sandoval

## COLEÇÃO OLIMPÍADAS

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática*, 9ª a 16ª - C.Moreira, E.Motta, E.Tengan, L.Amâncio, N.Saldanha, P.Rodrigues

Em continuação aos dois volumes anteriores, este livro completa a exposição dos principais tópicos matemáticos estudados no Ensino Médio.

Os assuntos que ele aborda são a Geometria Analítica (plana e espacial), vetores, matrizes, determinantes, sistemas de equações lineares, números complexos, polinômios e equações algébricas. A matéria aqui apresentada, como a dos demais volumes, foi objeto de vários cursos oferecidos no IMPA a professores do Ensino Médio, dentro do programa Prociências, da CAPES.

